Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Региональный этап

2022/2023 год

Конкурс: **10 класс**

Второй тур. Задачи. **Решения.**

Продолжительность работы — **140 минут**.

Максимальное количество баллов за задачи — **120**.
Каждая задача оценивается из **30 баллов**.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2023 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

При проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2022/2023 учебном году» (раздел 4). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки задач члены жюри делятся на рабочие группы, каждая группа проверяет конкретную задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к решениям, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем жюри или его заместителем. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. Оценка работ каждого участника во втором туре осуществляется не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, который не может быть оценен в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального

этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.

4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения в решении участника должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником необщеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). При этом недопустимо выставление баллов «за объем»: если участник написал большой текст, не содержащий продвижений в решении задачи, такой текст должен быть оценен в 0 баллов.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
11. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для до-

казательства его полноты и правильности, излагать необязательно.

12. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила получаемых выводов, штрафуется меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
13. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к другим пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
14. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
15. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение некоторых случаев может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобранных случаев в общем их числе).
16. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики и подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из своего опыта и справедливости. В спорных случаях пишите нам. Если ЦПМК захочет дать комментарии по проверке отдельных заданий (например, ответить на часто задаваемые вопросы), она сделает это на странице **http://ILoveEconomics.ru/olimp/region/grading**. Если ЦПМК посчитает нужным пояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов необходимо следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: cpmk@iloveeconomics.ru.

Ваша ЦПМК

Для справки. Критерии выполнения заданий олимпиады. В таблице приведено количество баллов, при котором задание считается выполненным. Эти сведения нужны для подсчета статистики результатов олимпиады; на индивидуальные результаты участников они не влияют.

Номер задания	Баллы
1	2
2	6
3	10
4	14
5	12
6	12
7	12
8	12

Задание 5. *Фирма «ЭПВВв»* *(30 баллов)*

Фирма «ЭПВВв» производит параболические антенны. Производственная функция фирмы имеет вид

$$Q(L,K)=\min\{L^2,K\}=\begin{cases}L^2, & L^2\leqslant K;\\ K, & L^2>K,\end{cases}$$

где Q — количество антенн (в тыс. шт., целочисленностью антенн пренебрегаем), L — объем труда, а K — объем капитала. Фирма является совершенным конкурентом как на рынке труда, так и на рынке антенн, цена 1 тыс. шт. равна 1. В настоящий момент в собственности фирмы есть 4 единицы капитала. Если фирма безразлична между несколькими объемами труда, то она выберет наибольший из них.

а) *(12 баллов)* Допустим, фирма не может изменить количество имеющегося у нее капитала. Выведите функцию спроса фирмы на труд $L_d(w)$, показывающую, сколько единиц труда фирма наймет при каждом уровне зарплаты $w>0$.

б) *(13 баллов)* У фирмы появляется возможность арендовать дополнительно 5 единиц капитала, заплатив за это в сумме величину S. Пусть $S_{max}(w)$ — максимальное значение S, которое будет готова заплатить фирма «ЭПВВв» за аренду 5 единиц капитала при каждом $w>0$. Выведите функцию $S_{max}(w)$ и постройте ее график.

в) *(5 баллов)* Рассмотрите фразу «В данном случае функция $S_{max}(w)$ ... , и значит, труд и капитал являются ... в производстве». Заполните первый пропуск словом «убывает» или «возрастает», а второй пропуск словом «субститутами» или «комплементами». Обосновывать свой выбор не нужно, в данном пункте проверяется только ответ.

Решение

а) При $K=4$ производственная функция фирмы принимает вид

$$Q(L,4)=\min\{L^2,4\}=\begin{cases}L^2, & L^2\leqslant 4;\\ 4, & L^2>4,\end{cases}$$

Составим функцию прибыли фирмы $\pi(L)$. Фирма выбирает объем труда, так чтобы ее прибыль была максимальной.

$$\pi(L)=TR-TC=P\cdot Q-wL=\begin{cases}L^2-wL, & L^2\leqslant 4;\\ 4-wL, & L^2>4\end{cases}=\begin{cases}L^2-wL, & L\leqslant 2;\\ 4-wL, & L>2.\end{cases}$$

Мы не включили в прибыль расходы на капитал, потому что они уже понесены.

Функция L^2-wL является квадратичной, ветви параболы направлены *вверх* (Это Парабола с Ветвями Вверх, ЭПВВв). Парабола с ветвями вверх максимальна на отрезке $[0;2]$ обязательно либо в левом, либо в правом конце отрезка[1]. Функция $4-wL$ же убывает, поэтому значения $L>2$ точно не оптимальны.

[1]Также можно это утверждение обосновать с помощью производной. $(L^2-wL)'=2L-w$. Первая производная возрастает, поэтому функция L^2-wL не может иметь максимума внутри отрезка. Возрастание первой производной можно обосновать через вторую: $(L^2-wL)''=2>0$.

Таким образом, максимум функции прибыли может достигаться либо при $L = 0$, либо при $L = 2$, поэтому нам достаточно сравнить прибыль в этих точках. При $L = 0$ прибыль равна 0, а при $L = 2$ прибыль равна $4 - 2w$. Сравнив значения прибылей, получаем, при $w \leqslant 2$ оптимально выбирать $L = 2$, а при $w > 2 - L = 0$. Искомая функция спроса на труд имеет вид:

$$L_d(w) = \begin{cases} 2, & w \leqslant 20, \\ w > 2; \end{cases}$$

Примечание (не является частью решения): Поскольку у нас парабола с ветвями вверх, в вершине параболы $L = w/2$ в данном случае достигается не максимум прибыли, а ее минимум, поэтому вершина нам заведомо не интересна, и ее можно не находить. Кроме того, ответ $L = w/2$ явно противоречит экономическому смыслу, так как спрос на труд в этом случае возрастает по зарплате. Кроме того, неверный ответ $L = w/2$ можно получить, воспользовавшись стандартным условием $MRP_L = w$.

б) Фирма готова платить сумму S за аренду 5 единиц капитала тогда и только тогда, когда ее прибыль от этого не уменьшается.

Рассчитаем прибыль фирмы в двух случаях: (1) фирма не арендует 2 единицы капитала; (2) фирма их арендует, платя S.

1. Если фирма не арендует 5 единицы капитала, ее прибыль равна максимальной прибыли из пункта а). Она равна

$$\pi_1^* = \begin{cases} 4 - 2w, & w \leqslant 2; \\ 0, & w > 2. \end{cases}$$

2. Если фирма арендует 5 единиц капитала, ее максимальную прибыль можно найти так же, как в пункте а), только не для $K = 4$, а для $K = 4 + 5 = 9$. Также нужно вычесть из прибыли S.
   При $K = 9$ функция прибыли фирмы примет вид

$$\pi(L) = \begin{cases} L^2 - wL - S, & L \leqslant 3; \\ 9 - wL - S, & L > 3. \end{cases}$$

   Фирма максимизирует ее по L. Аналогично пункту а), максимум достигается либо при $L = 0$, где прибыль равна $-S$, либо при $L = 3$, где прибыль равна $9 - 3w - S$. Получаем, что при $w \leqslant 3$ оптимальным является $L = 3$, при $w > 3 - L = 0$. Значит, максимальная прибыль равна

$$\pi_2^* = \begin{cases} 9 - 3w - S, & w \leqslant 3; \\ -S, & w > 3. \end{cases}$$

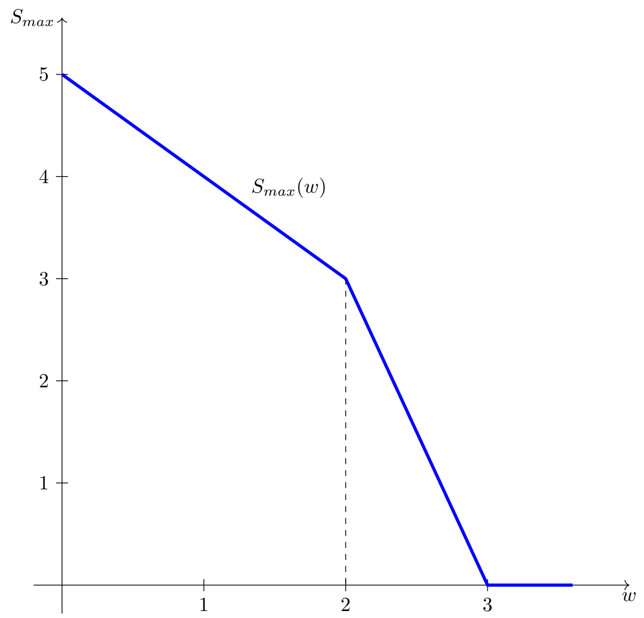
$S_{max}(w)$ — это максимальное значение S, при котором $\pi_2^* \geqslant \pi_1^*$. Значит,
- При $w \leqslant 2$ $S_{max}(w) = 9 - 3w - 4 + 2w = 5 - w$.
- При $2 < w \leqslant 3$ $S_{max}(w) = 9 - 3w - 0 = 9 - 3w$.

- При $w > 3$ $S_{max}(w) = 0 - 0 = 0$.

Таким образом,

$$S_{max}(w) = \begin{cases} 5 - w, & 0 < w \leqslant 2; \\ 9 - 3w, & 2 < w \leqslant 3; \\ 0, & w > 3. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид



в) 1) «убывает», 2) «комплементами».

Пояснение (от участника оно не требуется): $S_{max}(w)$ является готовностью платить за капитал, то есть величиной, характеризующей спрос на капитал. Получаем, что на качественном уровне спрос на капитал убывает по цене труда (зарплате). Когда спрос на одно благо убывает по цене другого, блага являются дополняющими (комплементами).

Схема проверки

Общие замечания:

- Участник может сначала решить задачу для любого K (в общем виде), а затем получить результаты для а) и б) путем подстановки $K = 4$ и $K = 9$ соответственно. В этом случае баллы за а) и б) зависят от того, насколько верно решена задача в общем виде.
- Во всех пунктах задачи расхождения с официальным решением при записи строгих/нестрогих неравенств не штрафуются.
- За каждую арифметическую ошибку снимается **1 балл**.

а) Всего за пункт а) **12 баллов**, из них:

- В функцию $Q(L,K)$ подставлено значение $K = 4$ — **1 балл.**
- Запись функции прибыли — **3 балла.**

- Идея о том, что на отрезке $[0; 2]$ оптимальным может быть только $L = 0$ или $L = 2$ (с обоснованием) — **3 балла.** Обоснованием может быть: ссылка на направление ветвей параболы, анализ монотонности с помощью первой производной либо с помощью первой и второй производной. Без обоснования ставится **один** балл из трех. Если участник утверждает, что оптимум находится вершине параболы $L = w/2$, решение неверно.
- Обоснование, что объемы $L > 2$ не оптимальны —**1 балл.**
- Определение того, при каких w оптимальным является $L = 0$, а при каких $L = 2$ — **3 балла.**
- Запись итогового ответа — **1 балл.**

б) Всего за пункт б) **13 баллов**, из них:

- Нахождение максимальной прибыли при отсутствии аренды при каждом w — **2 балла.**
- Нахождение максимальной прибыли с арендой при каждом w — всего **7 баллов**, из них:
  - Запись новой функции прибыли (при $K = 9$) — **2 балла.**
  - Утверждение о том, что оптимальным является $L = 0$ или $L = 3$ — **1 балл.** В отличие от пункта а), обоснование не требуется.
  - Определение того, при каких w оптимальным является $L = 0$, а при каких $L = 3$ —**2 балла.**
  - Вычисление максимальной прибыли при каждом w — **2 балла.**
- Определение S_{max} при $w \leqslant 2$ — **1 балл.**
- Определение S_{max} при $2 < w \leqslant 3$ — **1 балл.**
- Определение S_{max} при $3 < w$ — **1 балл.**
- График — **1 балл.**

Если участник записывает максимальную прибыль с арендой без $-S$, а затем корректно рассчитывает S_{max} как разность двух прибылей, оценка не снижается.

в) Всего за пункт в) — **5 баллов**, из них:

- **2 балла** за “убывает”;
- **3 балла** за “комплементы”;

Задание 6. *Монополия — лекарство от внешнего эффекта* *(30 баллов)*

В некой стране рынок грузовых автомобильных перевозок является рынком совершенной конкуренции. Спрос описывается уравнением $Q = 25 - P$, предложение имеет вид $P = 5$. Перевозки сопровождаются вредными выбросами в атмосферу. Объем перевозок Q влечет ущерб для экологии в денежном эквиваленте aQ^2, где $a > 0$ — параметр.

Государство задумалось о вмешательстве на данном рынке с целью увеличения общественного благосостояния. Министерство экономики подготовило список возможных мер, и среди них оказалась довольно неожиданная. Согласно расчетам министерства, общественное благосостояние увеличится, если принудительно объединить все фирмы, создав на этом рынке монополиста.

а) *(17 баллов)* Определите, какие значения может принимать параметр a в свете сказанного в предыдущем предложении.

б) *(13 баллов)* Определите значение параметра a, если объединение фирм приведет к росту общественного благосостояния до максимально возможного уровня.

Для справки. Величина общественного благосостояния при объеме Q равна сумме излишка потребителей (равного $CS = 0{,}5Q^2$) и прибыли фирм за вычетом ущерба для экологии. Считайте, что постоянные издержки отсутствуют.

Решение

а) Найдем, при каких a общественное благосостояние при монополии больше, чем при конкуренции.

1) Определим, какое количество грузовых перевозок производится при совершенной конкуренции. Пересекая спрос и предложение, получаем, что $Q^c = 25-P = 25-5 = 20$.

2) Определим величину общественного благосостояния при конкуренции. Излишек потребителей равен $CS = 20^2/2 = 200$ (его можно посчитать и непосредственно площадь треугольника, образованного графиками спроса и предложения: $CS^c = (25-5) \cdot 20/2 = 200$ (см. рис. 6.1).

Абсолютно эластичное предложение означает постоянные предельные издержки производства, которые равны 5: $MC = 5$. Поскольку $FC = 0$, то $AC = 5$, а значит, $P = AC$, то есть (экономическая) прибыль фирм равна нулю.

Наконец, ущерб для экологии равен $a(Q^c)^2 = 400a$.

Таким образом, общественное благосостояние при совершенной конкуренции равно

$$SW^c = CS^c + 0 - 400a = 200 - 400a.$$

3) Теперь найдем оптимум монополиста. Как мы выяснили, $MC = 5$, $FC = 0$, поэтому общие издержки монополиста равны $TC(Q) = 5Q$. Монополист решает задачу максимизации прибыли:

$$\pi(Q) = (25-Q)Q - 5Q = (20-Q)Q \to \max_Q$$

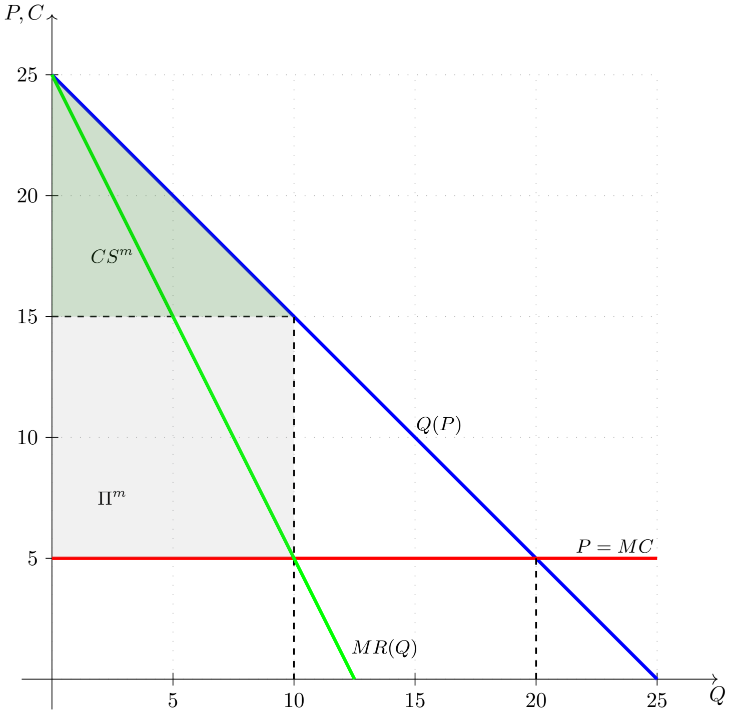


Рис. 6.1: Графическая иллюстрация к задаче. (Не требуется от участника.)

Графиком функции прибыли является парабола с ветвями вниз, вершина которой определяется объемом перевозок $Q^m = 10$.

Оптимум монополиста также можно было найти через равенство предельного дохода и предельных издержек: $MR(Q) = 25 - 2Q = 5$. Мы получим максимум, потому что это стандартная модель с линейным спросом, MR убывает, и MC постоянны. Также можно максимизировать прибыль как функцию от цены: $\pi(P) = (P-5)(25-P) \to \max\limits_{P}$, это парабола с ветвями вниз, вершина находится посередине между корнями, $P^* = (25+5)/2 = 15$, тогда $Q = 25 - P^* = 10$.

4) Определим величину общественного благосостояния при монополии. Величина излишка потребителя CS^m равна $(Q^m)^2/2 = 50$. (Ее можно найти и непосредственно как площадь треугольника, образованного графиком спроса и ценой $P^m = 15$: $CS^m = (25-15)\cdot 10/2 = 50$.) При этом монополист получит прибыль $\pi^m = (25-Q^m)Q^m - 5Q^m = 100$ и принесет ущерб экологии $a(Q^m)^2 = 100a$.

Значит, величина общественного благосостояния при монополии равна

$$SW^m = 50 + 100 - 100a = 150 - 100a$$

. 5) Монополизация рынка приведет к увеличению благосостояния, так что

$$SW^c < SW^m$$

$$200 - 400a < 150 - 100a$$

$$50 < 300a$$

$$1/6 < a.$$

Ответ: $a > 1/6$.

б) 1) Определим, при каком объеме перевозок достигается максимальный уровень благосостояния. В общем виде излишек потребителя равен $CS(Q) = Q^2/2$, а прибыль $\pi(Q) = (20 - Q)Q$. Таким образом, функция общественного благосостояния имеет вид

$$SW(Q) = Q^2/2 + (20 - Q)Q - aQ^2 = 20Q - \left(\frac{1}{2} + a\right)Q^2.$$

Графиком функции общественного благосостояния является парабола с ветвями вниз, вершина которой определяется объемом перевозок $Q^* = \frac{20}{1+2a}$. Аналогичный ответ также можно было получить, приравняв производную $SW(Q)$ к нулю и проверив критическую точку на максимум.

Итак, общественное благосостояние достигает своего максимального уровня при $Q^* = \frac{20}{1+2a}$.

2) Теперь определим, при каком a максимум общественного благосостояния достигается при монополии.

Способ 1 (более быстрый). Поскольку для достижения максимума общественного благосостояния необходимо, чтобы объем равнялся $Q^* = \frac{20}{1+2a}$, этот максимум достигается при монополии, если и только если монопольный выпуск равен как раз Q^*:

$$Q^m = Q^*$$

$$10 = \frac{20}{1 + 2a},$$

откуда $a = \frac{1}{2}$.

Ответ: $a = 1/2$.

Способ 2 (более длинный) Непосредственно приравняем максимальное общественное благосостояние к благосостоянию при монополии (которое мы уже нашли в пункте а)).

Максимально возможное благосостояние равно равно

$$SW(Q^*) = 20\frac{20}{1 + 2a} - \frac{1 + 2a}{2}\left(\frac{20}{1 + 2a}\right)^2 = \frac{200}{1 + 2a}.$$

Приравняем его к монопольному:

$$\frac{200}{1 + 2a} = SW^m = 150 - 100a.$$

Деля обе части на 100 и преобразовывая, получаем квадратное уравнение

$$4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$(2a - 1)^2 = 0,$$

откуда $a = 1/2$.

Примечания:

- В отсутствие внешних эффектов общественное благосостояние при монополии, конечно, не максимально, ведь монополия выбирает неэффективно низкий выпуск. Но при наличии отрицательного внешнего эффекта, такого как вред для окружающей среды, сокращение выпуска — это как раз то, что нужно обществу! Поэтому, как это ни парадоксально, монополизация рынка может в этом случае быть благом. Если внешний эффект мал (в данном случае при $a < 1/6$), мы находимся близко к стандартной ситуации, и монополизация все же уменьшает благосостояние (выгода от снижения выбросов меньше, чем ущерб от снижения потребительского излишка). Но если внешний эффект значителен ($a > 1/6$), монополизация приводит к росту благосостояния. И при определенных условиях (при $a = 1/2$) монополия даже может обеспечивать максимальный уровень благосостояния из всех возможных.
- Если бы мы определили общественное благосостояние не через прибыль, а через излишек производителей, что, возможно, звучит привычнее, ничего бы не изменилось, потому что прибыль равна излишку производителей минус FC, а FC равны нулю. Но даже если бы FC не были равны нулю, все объемы и ответы на вопросы задачи все равно бы не изменились, потому что FC это константа, которая не влияет на максимизацию общественного благосостояния.

Схема проверки

Общие замечания:

- Участник может на протяжении всего решения использовать термин «излишек производителей» вместо «прибыль», за это балл не снижается.
- За каждую арифметическую ошибку снимается **1 балл**.
- **1 балл** снимается каждый раз при отсутствии проверки достаточного условия максимума функции (прибыли или благосостояния). Участник может использовать любую аргументацию: парабола ветвями вниз, знак второй производной, убывание первой производной.

а) Всего за пункт а) — **17 баллов**, из них:

- Определение объема перевозок при конкуренции — **2 балла.**
- За условие $MC = P$, определение $MC = 5$ — **2 балла.**
- Определение величины благосостояния при конкуренции — **4 балла**, из них:
  - Расчет излишка потребителей — **1 балл.**
  - Расчет прибыли фирм — **1 балл.** Участнику достаточно указать, что прибыль равна 0, обоснования не требуется.
  - Расчет ущерба для экологии — **1 балл.**
  - Расчет итоговой величины благосостояния — **1 балл.**
- Определение объема перевозок при монополии — **3 балла**, из них:
  - Составление функции прибыли или выписывание условия $MR = MC$ — **1 балл.**
  - Вычисление оптимального объема — **2 балла.**
- Определение уровня общественного благосостояния при монополии — **4 балла**,

из них:
- Расчет излишка потребителей — **1 балл.**
- Расчет прибыли монополиста — **1 балл.**
- Расчет ущерба для экологии — **1 балл.**
- Расчет итоговой величины благосостояния — **1 балл.**

- Сравнение уровней благосостояния для двух рыночных структур и нахождение условия $a > 1/6$ — **2 балла.**

б) Всего за пункт б) — **13 баллов**, из них:

- Составление функции $SW(Q)$ в общем виде — **5 баллов**. Если функция благосостояния выведена иным верным способом без непосредственного использования CS и π, то засчитывается полный балл.
- Нахождение объема Q^*, при котором общественное благосостояние максимально — **2 балла.**

Далее, при решении *Способом 1*:

- За идею о том, что должно выполняться равенство объемов $Q_m = Q^*$ — **4 балла**.
- Нахождение $a = 1/2$ — **2 балла.**

Далее, при решении *Способом 2*:

- Вычисление максимально возможного благосостояния — **2 балла.**
- Составление верного уравнения на a —**2 балла.**
- Нахождение $a = 1/2$ — **2 балла.**

Задание 7. *Ипотека от застройщика* *(30 баллов)*

Иван может купить квартиру в новостройке стоимостью P, взяв ипотеку. У Ивана есть две опции:

1. Взять ипотеку в банке на срок T месяцев. В этом случае ставка процента составит $100R$ процентов в месяц. При этом застройщик предоставит Ивану скидку на квартиру: вместо P, стоимость квартиры для Ивана составит $(1-d)P$, где d — размер скидки.
2. Взять «ипотеку от застройщика» на срок T месяцев. В этом случае ставка процента составит $100r$ процентов в месяц, где $r < R$. Однако скидку на квартиру Иван не получит, и ему придется брать кредит на всю сумму P.

В обоих случаях проценты начисляются раз в месяц по схеме сложных процентов, причем выплаты осуществляются так, что каждый месяц платеж Ивана одинаков. Этот платеж каждый месяц вычитается из суммы долга после начисления процентов. Например, если изначальная сумма долга равна S_0, платеж равен X, а ставка процента равна $(100i)$ %, то долг на конец первого месяца будет равен $S_1 = (1+i)S_0 - X$, долг на конец второго будет равен $S_2 = (1+i)S_1 - X$, и т.д. Платеж X подбирается так, чтобы в конце срока кредита долг Ивана был равен нулю.

Иван хочет, чтобы его ежемесячный платеж по ипотеке был как можно меньше. Определите, при каких значениях d ипотека от банка (опция 1) для Ивана строго предпочтительнее, чем ипотека от застройщика (опция 2). Ваш ответ должен зависеть только от параметров P, T, R, r (возможно, их части). При решении используйте обозначение S_t для суммы долга через t месяцев и X для платежа, как выше.

Для справки. Верно тождество $b+bq+bq^2+\ldots+bq^n = \frac{b-bq^{n+1}}{1-q}$. Для получения полного балла, пожалуйста, примените эту формулу.

Решение

Пусть сумма кредита равна S_0, ежемесячный платеж равен X, а ставка процента равна $100i$ процентов в месяц. Выразим X через S_0 и i. Для этого изучим, как сумма долга Ивана будет меняться во времени.

Сумма долга на конец месяца $t+1$ равна

- Через месяц после открытия кредита сумма долга Ивана составит $S_0(1+i) - X$.
- Через два месяца сумма долга составит

$$S_2 = (S_0(1+i) - X)(1+i) - X = S_0(1+i)^2 - X(1+i) - X. \tag{7.1}$$

- Через три месяца сумма долга составит $S_3 = \left[S_0(1+i)^2 - X(1+i) - X\right](1+i) - X = S_0(1+i)^3 - X(1+i)^2 - X(1+i) - X$.
- Продолжая по аналогии, получаем, что через t месяцев сумма долга составит

$$S_t = S_0(1+i)^t - X(1+i)^{t-1} - X(1+i)^{t-2} - \ldots - X(1+i) - X \tag{7.2}$$

.

Платеж X подбирается так, чтобы в конце срока, то есть через T месяцев, долг был равен нулю:

$$S_0(1+i)^T - X(1+i)^{T-1} - X(1+i)^{T-2} - \ldots - X(1+i) - X = 0. \tag{7.3}$$

$$S_0(1+i)^T = X\left(1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{T-1}\right).$$

Пользуясь формулой для суммы конечной геометрической прогрессии, данной в условии, получаем

$$S_0(1+i)^T = X\frac{1-(1+i)^T}{1-1-i} = X\frac{(1+i)^T-1}{i}.$$

Отсюда

$$X = \frac{S_0(1+i)^T i}{(1+i)^T-1} = \frac{S_0 i}{1-(1+i)^{-T}}. \tag{7.4}$$

В случае ипотеки от банка платеж вычисляется по формуле (7.4) при $S_0 = P(1-d)$, $i = R$, то есть

$$X = \frac{P(1-d)(1+R)^T R}{(1+R)^T-1}.$$

В случае ипотеки от застройщика платеж вычисляется по формуле (7.4) при $S_0 = P$, $i = r$, то есть

$$\frac{P(1+r)^T r}{(1+r)^T-1}.$$

Значит, при ипотеке от банка платеж меньше, когда

$$\frac{P(1-d)(1+R)^T R}{(1+R)^T-1} < \frac{P(1+r)^T r}{(1+r)^T-1}.$$

Сокращая на P и выражая d, получаем что ипотека от банка выгоднее при

$$d > 1-\frac{r}{R}\frac{(1+r)^T}{(1+R)^T}\frac{(1+R)^T-1}{(1+r)^T-1}.$$

Это условие можно записать компактнее:

$$d > 1-\frac{r}{R}\frac{1-(1+R)^{-T}}{1-(1+r)^{-T}} \text{ или } d > 1-\frac{r}{R}\frac{1-\frac{1}{(1+R)^T}}{1-\frac{1}{(1+r)^T}}.$$

Примечания:

- «Ипотека от застройщика» получила распространение в России в последние годы. Ставка процента по такой ипотеке зачастую крайне низка (вплоть до 1 % годовых), однако такая ипотека не всегда выгоднее, чем ипотека от банка. Цена покупки квартиры по такой ипотеке выше из-за того, что не предоставляется скидка.
- Схема возврата кредита с постоянным платежом, описанная в задаче, является одной из самых распространенных на практике. Такая схема называется *аннуитетной.*

Схема проверки

Решение задачи состоит из двух частей — (1) вывод формулы для платежа и (2) ее применение для получения неравенства на d. Первая часть оценивается из 20 баллов, вторая — из 10 баллов.

1. Вывод формулы (7.4) для аннуитетного платежа — **20 баллов**, из них:
   - **14 баллов** за верное уравнение на X (уравнение (7.3) или эквивалентное ему). Из них:
     - **4 балла** за связь S_2 и S_0 (уравнение (7.1)).
     - **8 баллов** за общую формулу для S_t (уравнение (7.1)).
     - **2 балла** ставится за выписывание самого уравнения (7.3) или эквивалентного ему.

     При этом, если участник дополнительно вывел связь S_3 и S_0, не перешел к общей формуле для S_t, ему ставится еще **2 балла**. Если участник вывел еще и связь для S_4 и S_0 (S_5 и S_0, и т.д.), но не перешел к общей формуле, доп. баллы не ставятся.
   - **3 балла** за упрощение уравнения с использованием формулы геометрической прогрессии.
   - **3 балла** за то, что участник выразил X и получил формулу (7.4) (правая часть может быть записана любым верным способом).

     При этом участник может сделать все выкладки сразу для ипотеки от банка ($S_0 = P(1-d), i = R$) или от застройщика ($S_0 = P, i = r$), а затем отметить, что для другого типа ипотеки все делается аналогично. В этом случае ставится полный балл.
2. Получение неравенства на d — **10 баллов**, из них:
   - **2 балла** за верное значение платежа по ипотеке от банка.
   - **2 балла** за верное значение платежа по ипотеке от застройщика.
   - **3 балла** за запись верного неравенства между платежами.
   - **3 балла** за его решение относительно d. Граница для d может быть представлена в любом верном виде.

   Если участник сделал все верно, но не использовал формулу суммы геометрической прогрессии, оставив такую сумму в ответе, он получает все баллы, кроме баллов по критерию “**3 балла** за упрощение уравнения с использованием формулы геометрической прогрессии”. То есть **27 баллов** за задачу.

Задание 8. *Налог на добычу полезных ископаемых* *(30 баллов)*

В России действует налог на добычу полезных ископаемых (НДПИ). В случае нефти он взимается как потоварный налог за каждую добытую тонну нефти, при этом ставка налога t зависит от мировой цены на нефть. В этой задаче мы рассмотрим модель, в рамках которой можно определить оптимальную ставку НДПИ в зависимости от мировой цены.

Предположим, что в некой стране внутренний спрос на нефть описывается уравнением $P = 90 - 3Q$, а внутреннее предложение — уравнением $P = 30 + Q$. Страна может экспортировать на мировой рынок любое количество нефти по цене $x \geqslant 0$, но импортировать нефть не может. Государство вводит НДПИ на нефть как потоварный налог по ставке $t \geqslant 0$. Налог взимается с каждой добытой единицы нефти независимо от того, где она продана. Государство максимизирует сумму налоговых сборов. Если государство безразлично между двумя ставками налога, оно выбирает наименьшую из них.

Пусть $t^*(x)$ — ставка налога, которую назначит государство в зависимости от x. Выведите функцию $t^*(x)$ для всех $x \geqslant 0$ и постройте ее график.

Решение

После введения НДПИ по ставке t возможны два случая: 1) нефть поставляется только на внутренний рынок; 2) нефть поставляется как на внутренний, так и на внешний рынок.

Найдем, при каких t и x реализуется каждый из двух случаев. Прямая функция внутреннего спроса имеет вид $Q_d(P) = 30 - P/3$. После введения НДПИ кривая предложения примет вид $P = 30 + Q + t$, то есть $Q_s(P) = P - 30 - t$. Нефть будет поставляться на внешний рынок тогда и только тогда, когда $Q_d(x) < Q_s(x)$, то есть $30 - x/3 < x - 30 - t$, откуда $t < 4x/3 - 60$.

Теперь найдем зависимость равновесного объема добычи (производства) от t. При $t < 4x/3 - 60$ нефть будет экспортироваться, общий объем добычи будет определяться мировой ценой, $Q = Q_s(x) = x - 30 - t$. При $t \geqslant 4x/3 - 60$ нефть будет продаваться только внутри страны, а значит, объем будет определяться внутренним равновесием: $90 - 3Q = 30 + Q + t$, откуда $Q = (60 - t)/4$. Подытоживая,

$$Q(t) = \begin{cases} x - 30 - t, & t < 4x/3 - 60; \\ (60 - t)/4, & t \geqslant 4x/3 - 60. \end{cases}$$

Значит, налоговые сборы по НДПИ будут равны

$$T(t) = tQ(t) = \begin{cases} t(x - 30 - t), & t < 4x/3 - 60; \\ t(60 - t)/4, & t \geqslant 4x/3 - 60. \end{cases}$$

Государство максимизирует эту функцию по t. Найдем точку глобального максимума $T(t)$ при каждом $x \geqslant 0$. Заметим, что функция $T(t)$ на каждом из двух участков является квадратичной, ветви парабол направлены вниз. Легко проверить, что функция является непрерывной в точке переключения с одной параболы на другую.

Чтобы установить промежутки монотонности функции $T(t)$, найдем точки вершин парабол, а также значения x, при которых вершины парабол находятся на актуальных для этих парабол участках. Последнее важно, потому что если обе вершины парабол находятся за пределами участков, на которых эти параболы актуальны, то $T(t)$ будет максимальна не в вершине какой-либо из двух парабол, а в точке стыковки двух парабол.

Вершиной левой параболы является $t_1 = (x - 30)/2$, вершиной правой параболы $t_2 = 30$. Эти точки можно также найти, приравнивая производную сборов к нулю. Вершина левой параболы принадлежит актуальному для этой параболы участку при $(x - 30)/2 < 4x/3 - 60$, $x > 54$. Вершина правой параболы принадлежит актуальному для этой параболы участку при $30 > 4x/3 - 60$, $x < 67{,}5$. Кроме того, заметим, что при $x \leqslant 45$ $4x/3 - 60 \leqslant 0$, и потому левого участка при $x \leqslant 45$ просто нет (это случай, когда мировая цена меньше чем равновесная в закрытой экономики, поэтому даже без налога экспорта не будет).

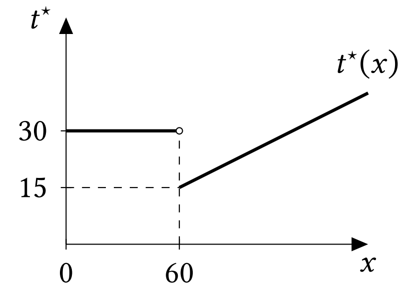
Получаем 4 случая.

1. При $x \leqslant 45$ левого участка нет, графиком $T(t)$ является просто парабола, оптимальной ставкой налога является $t^* = t_2 = 30$.
2. При $x \in (45; 54]$ левый участок есть, но вершина левой параболы находится вне левого участка (справа от него). Значит, на левом участке функция $T(t)$ монотонно возрастает. Вершина правой правой параболы принадлежит правому участку. Значит, максимум функции $T(t)$ достигается в вершине правого участка, $t^* = t_2 = 30$.
3. При $x \in (54; 67{,}5]$ вершины обеих парабол принадлежат соответствующим участкам. Значит, максимум $T(t)$ достигается в одной из вершин — в той, где значение функции больше. Сравним эти значения. $T(t_1) = T((x - 30)/2) = (x - 30)^2/4$. $T(t_2) = T(30) = 900/4$. $T(t_1) > T(t_2)$ при $(x - 30)^2/4 > 900/4$, $(x - 30)^2 > 900$, $x > 60$. Значит, при $x > 60$ оптимальной ставкой будет $t^* = t_1 = (x - 30)/2$, при $x < 60$ оптимальной ставкой будет $t^* = t_2 = 30$. При $x = 30$ государство безразлично. По условию, оно выберет наименьшую ставку, то есть $t_1 = (60 - 30)/2 = 15$.
4. При $x > 67{,}5$ вершина левой параболы принадлежит левому участку, вершина правой параболы лежит левее правого участка. Значит, на правом участке функция монотонно убывает, а максимум достигается в вершине левого участка, $t^* = t_1 = (x - 30)/2 = x/2 - 15$.

В итоге, получаем, что оптимальной ставкой налога при каждой мировой цене $x \geqslant 0$ является

$$t^*(x) = \begin{cases} 30, & x < 60; \\ x/2 - 15, & x \geqslant 60. \end{cases}$$

График этой функции выглядит следующим образом:



Примечания:

- Дилемма государства здесь заключается в том, чтобы решить, назначить ставку НДПИ побольше, но тогда потенциально задушить весь экспорт, либо же назначить ставку поменьше, но получить большие сборы за счет большого объема экспорта.
- На данный момент в России ставка НДПИ на нефть определяется по формуле $t(x) = \alpha x - \beta$, где x — мировая цена на нефть, где $\alpha > 0$ — константа, а $\beta > 0$ — параметр, зависящий от технологии производства нефти. Таким образом, на участке, соответствующем экспорту (при $x > 60$) наша модель генерирует тот же вид зависимости $t(x)$, что и наблюдается в реальной жизни. Кроме того, решив задачу в общем виде, можно убедиться (убедитесь!), что оптимальная величина сдвига β в нашей модели зависит только от параметров функции предложения, то есть как раз от технологии производства.

Схема проверки

- За каждую арифметическую ошибку снимается **1 балл**.

- Нахождение объема добычи $Q(t) = (60-t)/4$ при продаже только на внутреннем рынке с учетом налога t — **5 баллов**. Из них:
  - Составление верного уравнения на Q (путем сдвига предложения на t или другим корректным способом) — **4 балла**
  - Решение этого уравнения — **1 балл**.

  Если участник ограничился лишь нахождением внутреннего равновесия без налога ($Q = 15$, $P = 45$), он получает за этот пункт **2 балла.**
- Нахождение объема добычи $Q(t) = x - 30 - t$ при экспорте с учетом налога t — **5 баллов.** Из них:
  - Составление верного уравнения на Q (путем сдвига предложения на t или другим корректным способом) — **4 балла**
  - Решение этого уравнения — **1 балл**.
- Определение условия на t и x, при котором экспорт осуществляется/не осуществляется — **5 баллов.** (При $t < 4x/3 - 60$ экспорт есть, иначе нет.) Если участник ограничился лишь нахождением условия на x, при котором будет экспорт ($x > 45$), он получает за этот пункт **1 балл.**
- Запись итоговой функции сборов $T(t)$ — **2 балла.**

- Нахождение вершины левой параболы — **1 балл.** За непроверку достаточных условий максимума балл не снижается.
- Нахождение вершины правой параболы — **1 балл.** За непроверку достаточных условий максимума балл не снижается.
- Нахождение значений x, при которых вершина левой параболы лежит на левом участке — **1 балл.**
- Нахождение значений x, при которых вершина правой параболы лежит на правом участке — **1 балл.**
- Нахождение оптимальной ставки t^* в случае 1 —**1 балл.**
- Нахождение оптимальной ставки t^* в случае 2 —**1 балл.**
- Нахождение оптимальной ставки t^* в случае 3 —**4 балла,** из них:
  - **1 балл** за нахождение максимальных сборов для левой параболы.
  - **1 балл** за нахождение максимальных сборов для правой параболы.
  - **2 балла** за определение того, при каких x одни сборы больше других и наоборот.
- Нахождение оптимальной ставки t^* в случае 4 —**1 балл.**
- Выписывание итогового ответа $t^*(x)$ —**1 балл.**
- Верный график (подписи числовых значений не обязательны) —**1 балл.** За неверно выколотую точку балл не снижается.

Если участник находит только лишь вершины двух парабол, и сравнивает сборы в двух вершинах, то он получит верный ответ на вопрос задачи. Однако такое решение является неполным, потому что прямое сравнение сборов в двух вершинах возможно, только когда обе вершины действительно «задействованы» в функции $T(t)$, то есть находятся на актуальных для своих парабол участках. Такое решение оценивается в **25 баллов**, так как участник не определил значений x, при которых вершина левой параболы лежит на левом участке, вершина правой лежит на правом участке, а также не рассмотрел случаи 1, 2 и 4, ограничившись случаем 3. Если при таком решении участник проанализировал отдельно случай 1, его решение оценивается в **26 баллов**.