10 класс
Теоретический тур

Задача №10-Т1. Зонд

Температура падает с высотой со скоростью $k = 8$ К/км. На высоте $h_1 = 4$ км, следовательно, температура равна $T_1 = 268$ К, а давление (по графику) $p_1 \approx 62$ кПа. Плотность воздуха на этой высоте равна

$$\rho_{\text{в}1} = \frac{p_1 M_{\text{в}}}{RT_1}.$$

Масса гелия в шаре $m_{\text{г}}$ в процессе подъёма не меняется, поэтому

$$m_{\text{г}} = \frac{p_0 M_{\text{г}} V}{RT_0}.$$

Запишем условие равновесия зонда на заданной высоте:

$$\rho_{\text{в}1} g V = (m_{\text{г}} + m_0 + m_{\text{д}})g$$

Откуда

$$m_{\text{д}} = \rho_{\text{в}1} V - m_{\text{г}} - m_0 = \frac{p_1 M_{\text{в}} V}{RT_1} - \frac{p_0 M_{\text{г}} V}{RT_0} - m_0 = 4.9 \text{ кг}.$$

Без датчиков шар будет подниматься, пока не станет справедливым новое условие равновесия

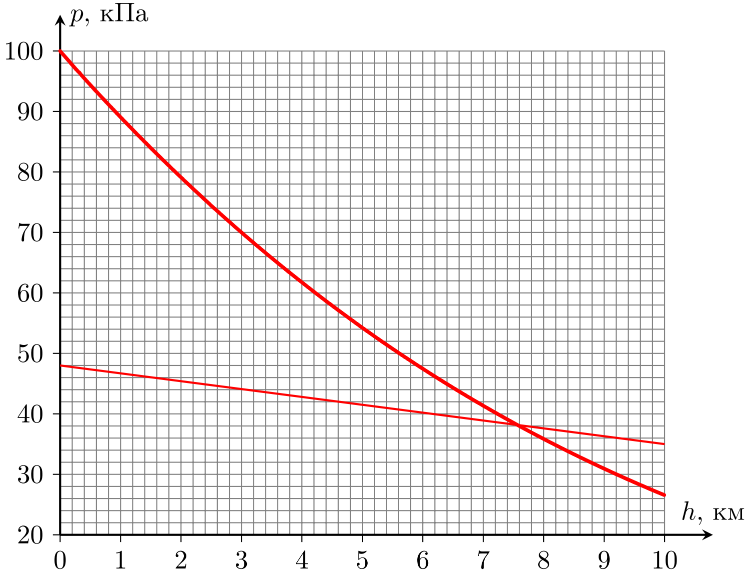
$$\rho_{\text{в}} g V = (m_{\text{г}} + m_0)g.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p(h) M_{\text{в}}}{RT(h)} = \frac{m_{\text{г}} + m_0}{V} \qquad \Rightarrow \qquad p(h) = \frac{(m_{\text{г}} + m_0)R}{M_{\text{в}} V} \cdot (T_0 - kh) \approx 48 \text{ кПа} - 1.3\ \frac{\text{кПа}}{\text{км}} \cdot h.$$

Для нахождения высоты построим поверх графика зависимости $p(h)$ прямую, соответствующую полученному уравнению, и найдем, что максимальная высота равна примерно 7.6 км.

Примечание: на графике (толстая линия) изображена функция $p(h) = p_0(1 - kh/T_0)^{\frac{M_{\text{в}} g}{kR}}$, задающая распределение давления по высоте при зависимости температуры $T(h) = T_0 - kh$.



Задача №10-Т2. Наклонная плоскость

Так как стержень жесткий и изначальная скорость сообщена вдоль наклонной плоскости, то тело будет двигаться по окружности радиуса L.

При движении на груз действуют четыре силы: потенциальная сила тяжести и непотенциальные силы трения и реакции опоры со стороны стержня и плоскости. Сила реакции со стороны стержня, как и сила реакции со стороны плоскости, в любой момент времени направлены перпендикулярно скорости, поэтому их работа равна нулю. Сила трения постоянна по модулю и в любой момент направлена против скорости, поэтому работа силы трения будет равна $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}S$, где S — длина пути, пройденного телом. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную плоскости: $N - mg\cos\alpha = 0$. Так как тело скользит, то на него действует сила трения скольжения, равная $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Пусть скорость груза в верхней точке равна 0. Запишем связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg \cdot 2L\sin\alpha - 0) + \left(0 - \frac{mv_1^2}{2}\right) = -\mu mg\cos\alpha \cdot \pi L.$$

Скорость v_1 будет равна

$$v_1 = \sqrt{gL(4\sin\alpha + 2\mu\pi\cos\alpha)} = \sqrt{(4+\pi)gL\sin\alpha} \approx \sqrt{7.14\, gL\sin\alpha}.$$

Рассмотрим в произвольный момент времени проекции сил, действующих на груз, на ось, сонаправленную скорости. Не нулевыми на эту ось будут только проекции силы тяжести и силы трения. Пока груз движется от нижней точки к самой верхней, обе проекции будут отрицательными, значит модуль скорости груза будет уменьшаться. В процессе дальнейшего движения проекция силы тяжести станет положительной и будет постепенно возрастать от нулевого значения, значит скорость тела первое время продолжит уменьшаться и достигнет минимума в точке, когда проекция силы тяжести скомпенсирует проекцию силы трения:

$$mg\sin\alpha\sin\beta - \mu mg\cos\alpha = 0$$

(здесь β – угол между стержнем и «вертикалью», то есть прямой, проходящей через верхнюю точку траектории груза и шарнир). Отсюда получим, что

$$\sin\beta = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Так как работа силы трения и изменение потенциальной энергии при перемещении в фиксированное положение не зависят от величины начальной скорости, то минимальному значению скорости на старте соответствует нулевое значение минимальной скорости в процессе дальнейшего движения. Запишем опять связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg\cdot L\sin\alpha\cdot(1+\cos\beta) - 0) + \left(0 - \frac{mv_2^2}{2}\right) = -\mu mg\cos\alpha\cdot(\pi+\beta)L.$$

Тогда

$$v_2^2 = 2gL\sin\alpha\cdot(1+\cos\beta) + 2\mu g\cos\alpha(\pi+\beta)L = gL\sin\alpha\left(2+\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6}\right)$$

откуда

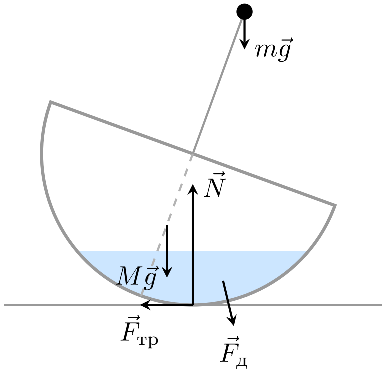
$$v_2 = \sqrt{(2+\sqrt{3}+7\pi/6)gL\sin\alpha} \approx \sqrt{7.40\,gL\sin\alpha}$$

Задача №10-Т3. Волчок

Определим координату центра масс полусферы. Мысленно «разрежем» полусферу плоскостями, параллельными основанию, на тонкие кольца толщиной h каждое. Масса такого кольца пропорциональна площади его поверхности. Пусть кольцо видно из центра полусферы под углом φ к ее основанию. Тогда радиус кольца равен $r = R\cos\varphi$. Заметим, что поверхность кольца образует с основанием полусферы угол $\pi/2 - \varphi$. Площадь поверхности кольца равна произведению его длины $2\pi r = 2\pi R\cos\varphi$ на ширину $h/\sin(\pi/2-\varphi) = h/\cos\varphi$. Как видно из формул площадь кольца не зависит от угла, под которым оно видно из центра, а это означает, что масса полусферы равномерно распределена вдоль радиуса, перпендикулярного ее основанию, значит центр масс находится на расстоянии $R/2$ от центра.

Примечание: Решения, полученные интегрированием или другим способом также засчитываются, если исходят из верных начальных утверждений и корректно реализованы.

Рассмотрим силы, действующие на волчок, после того, как его отклонили и отпустили. На волчок будут действовать две силы тяжести $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$, сила реакции опоры со стороны стола $\vec{N}$. Направления этих сил вертикальны. Направления еще двух сил зависят от направления движения волчка. Рассмотрим случай, когда волчок возвращается в исходное состояние. В таком случае на него будет действовать сила трения, направленная влево и сила давления со стороны воды, направленная вниз и вправо. Горизонтальная составляющая силы давления со стороны воды возникает из-за наличия трения между волчком и столом, следствием которого является движение центра масс воды влево. Это движение может быть обеспечено только за счет взаимодействия со стенками. Также стоит отметить тот факт, что мы изобразили результирующую силу давления воды, которая на самом деле распределена по поверхности контакта с полусферой и в каждой точке направлена перпендикулярно поверхности, то есть от центра полусферы. Это означает, что суммарный момент этой силы относительно центра полусферы равен нулю.



Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы после отклонения на малый угол волчок стремился вернуться обратно. Рассмотрим ось вращения, проходящую через центр полусферы. Моменты сил давления воды и реакции опоры относительно этой оси равны нулю. Сила трения нас не интересует, так как ее направление будет определяться суммарным моментом двух сил тяжести. Если суммарный момент двух сил тяжести направлен против часовой стрелки (стремится вернуть волчок в положение равновесия), то сила трения будет направлена влево и будет лишь замедлять скорость поворота волчка, но не может изменить направление его вращения. Из вышеизложенного становится понятно, что устойчивость равновесия волчка никак не зависит от количества налитой воды. Найдем положение центра масс волчка для случая $M = 6m$. Выберем ось x, проходящую через центр полусферы и направленную перпендикулярно ее основанию.

$$x_{\text{цм}} = \frac{6mR/2 - mR}{6m + m} > 0,$$

значит центр масс волчка расположен ниже его центра, а именно к нему приложена результирующая двух сил тяжести. Получаем, что в первом случае вне зависимости от объема налитой воды волчок будет находиться в состоянии устойчивого равновесия.

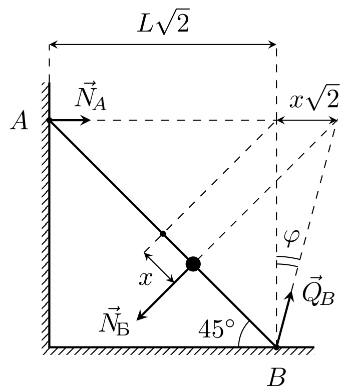
Налитая вода на равновесие не влияет. Для устойчивости равновесия необходимо чтобы центр масс волчка оказался ниже центра полусферы. Рассмотрим ту же ось x, что и в первом случае.

$$x_{\text{цм}} = \frac{MR/2 - mR}{M + m} > 0,$$

откуда $M/m > 2$.

Задача №10-Т4. Бусинка на стержне

Первый способ



Поскольку стержень находится в равновесии — равнодействующая сил, действующих на него, должна равняться нулю, а также относительно любой точки должен равняться нулю момент действующих на стержень сил. Поскольку массой стержня можно пренебречь, можно считать, что силы прикладываются к стержню в точках A, B и в месте положения бусинки.

Сила реакции со стороны вертикальной стены $\vec{N}_A$ направлена горизонтально, а сила взаимодействия бусинки со стержнем $\vec{N}_{\text{Б}}$ направлена перпендикулярно последнему, поскольку трения между ними нет. Тогда линия действия равнодействующей сил нормальной реакции и трения в точке B — полной реакции опоры $\vec{Q}_B = \vec{N}_B + \vec{F}_{\text{тр}}$ — должна проходить через точку пересечения линий действия $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_{\text{Б}}$ по теореме о трёх непараллельных силах. Изобразим это на рисунке.

Поскольку линия действия $\vec{N}_A$ фиксирована, а $\vec{N}_{\text{Б}}$ сохраняет своё направление — точка пересечения линий действия сил перемещается горизонтально. Угол наклона стержня к вертикали составляет $45°$, значит смещению бусинки вдоль стержня на величину x соответствует смещение пересечения линий действия сил на величину $x\sqrt{2}$.

Возможны два варианта начала движения стержня: скольжение по полу и стенке или вращение относительно нижнего конца. Предположим, что стержень начнёт проскальзывать. Это произойдет в тот момент, когда $\vec{Q}_B$ более не сможет удовлетворить условию пересечения линий действия сил, т.е. угол φ превысит величину $\operatorname{arctg}\mu$.

Отсюда найдём перемещение бусинки x_{max}:

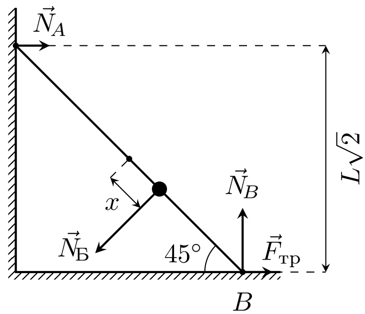
$$\frac{x_{max}\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} = \mu \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \mu L.$$

Стержень придет в движение до момента удара бусинки о пол, если $x_{max} < L$, отсюда получаем условие на коэффициент трения, при котором возможна описанная ситуация $\mu < 1$. Определим скорость бусинки из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgx_{max}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\sqrt{2}\mu g L}.$$

Второй способ

Расставим силы, действующие на стержень, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:



$$F_{тр} + N_A - \frac{N_Б}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$N_B - \frac{N_Б}{\sqrt{2}} = 0$$

и правило моментов относительно точки B:

$$N_Б(L - x) = N_A \frac{2L}{\sqrt{2}}.$$

Из второго закона Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню, получим, что $N_Б = mg/\sqrt{2}$. Решив систему уравнений, найдем:

$$N_A = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \qquad N_B = \frac{mg}{2}, \qquad F_{тр} = \frac{mgx}{2L}.$$

Проскальзывание начнется при $F_{тр} = \mu N_B$, то есть если

$$\frac{mgx}{2L} = \frac{\mu mg}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \mu L.$$

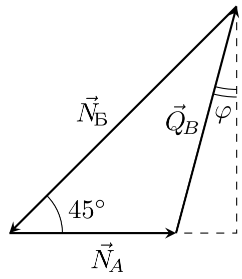
Отсюда при условии, что $x < L$, получим $\mu < 1$. До начала проскальзывания бусинка движется равноускорено с ускорением $a = g/\sqrt{2}$. Начальная скорость бусинки равна нулю, поэтому

$$v^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2 \cdot \frac{g}{\sqrt{2}} \cdot \mu L \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\sqrt{2}\mu g L}.$$

Силу взаимодействия стержня с вертикальной стенкой также можно определить двумя способами.

Первый способ

Изобразим на рисунке условие равенства нулю равнодействующей сил, действующих на стержень (см. рис.). Обратим внимание, что из второго закона Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню, $N_Б = const = mg/\sqrt{2}$. Тогда имеем



$$N_A = \frac{mg(1 - \operatorname{tg}\varphi)}{2}.$$

В момент отрыва $\operatorname{tg}\varphi = \mu$, поэтому

$$N_A = \frac{mg(1-\mu)}{2}.$$

Как мы выяснили выше, описанная в условии ситуация возможна только при $\mu < 1$, тогда $N_A > 0$. Это означает, что наше предположение, о том, что проскальзывание начнется раньше переворота справедливо, а полученные ответы верны.

Второй способ

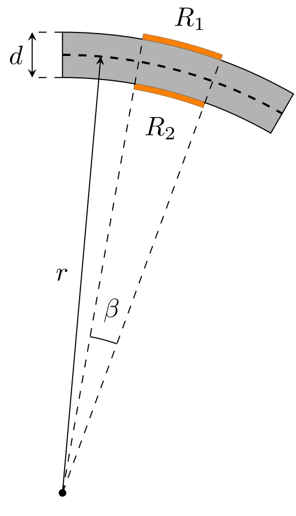
Так как в момент начала проскальзывания $x = \mu L$,

$$N_A = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{mg(1-\mu)}{2}.$$

Как мы выяснили выше, описанная в условии ситуация возможна только при $\mu < 1$, тогда $N_A > 0$. Это означает, что наше предположение, о том, что проскальзывание начнется раньше переворота справедливо, а полученные ответы верны.

Задача №10-Т5. Весы

Проведем из центра дуги окружности недеформируемой линии два луча к краям резистора №1. Эти два луча отсекут на недеформируемой линии дугу, размер которой будет равен размеру резистора l_0 до деформации. Положим угол между лучами равным β. Тогда размер резистора в недеформируемом состоянии окажется равным $l_0 = \beta r$.



Размер подложки после деформирования балки составит

$$l = \beta(r + d/2).$$

Тогда величина относительного удлинения резистора составит

$$\varepsilon_1 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{d}{2r}.$$

Относительное изменение длины резистора №2 будет таким же по модулю, но отрицательным.

$$\varepsilon_2 = -\frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{d}{2r}.$$

В ненагруженном состоянии балки напряжения на резисторах №1 и №2 одинаковы и равны половине напряжения источника питания. Показания вольтметра в этом случае будут нулевыми. При нагрузке балки сопротивление резистора №1 увеличится на величину

$$\Delta R = k\varepsilon R_0 = k \cdot \frac{d}{2r} \cdot R_0 \ll R_0,$$

а сопротивление резистора №2 уменьшится на ту же величину. Силы тока через резисторы R_1 и R_2, соответственно, равны

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R}, \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R}.$$

Показание вольтметра будет равно разности напряжений на резисторах $R_3 = R_0$ и составит

$$U = (I_2 - I_1)R_0 = \left(\frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R}\right) \cdot R_0 = \frac{2\mathcal{E}R_0\Delta R}{4R_0^2 - (\Delta R)^2} \approx \frac{\mathcal{E}}{2} \cdot \frac{\Delta R}{R_0}.$$

С учетом ранее полученного выражения для изменений сопротивлений резисторов:

$$U = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = \frac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}.$$

Таким образом, зависимость величины показаний вольтметра от массы поставленного на платформу груза является прямой пропорциональностью, то есть $n = 1$. Тогда для коэффициента этой зависимости имеем:

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}kd}{4\alpha}.$$

Если недеформируемая линия балки будет проходит на некотором расстоянии x от верхней поверхности балки, то формулы для относительной деформации подложек резисторов №1 и №2 примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x/r, \\ \varepsilon_2 = -(d - x)/r. \end{cases}$$

Соответственно, относительные изменения сопротивлений:

$$\begin{cases} \Delta R_1/R_0 = kx/r, \\ \Delta R_2/R_0 = -k(d - x)/r. \end{cases}$$

Тогда для показаний вольтметра аналогично предыдущему случаю получим:

$$U' = \left(\frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_2} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_1}\right)\cdot R_0 = \frac{\mathcal{E} R_0(\Delta R_1 - \Delta R_2)}{(2R_0 + \Delta R_1)(2R_0 + \Delta R_2)} \approx \frac{\mathcal{E}}{4}\cdot\frac{\Delta R_1 - \Delta R_2}{R_0},$$

откуда

$$U' = \frac{k\,\mathcal{E}}{4}\left(\frac{x}{r} + \frac{d-x}{r}\right) = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = U.$$

То есть полученный ранее ответ не зависит от места положения недеформируемой линии.

Теперь предположим, что балка ко всему прочему нагрелась. Тогда к относительным изменениям длины подложек резисторов добавятся еще и удлинения за счет теплового расширения балки:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = d/(2r) + \varepsilon_3, \\ \varepsilon_2 = -d/(2r) + \varepsilon_3. \end{cases}$$

Проведя аналогичные вычисления получим, что и в этом случае показания вольтметра останутся прежними:

$$U'' = \frac{k\,\mathcal{E}}{4}\left(\frac{d}{2r} + \varepsilon_3 - \frac{d}{2r} - \varepsilon_3\right) = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = U.$$

То есть предложенная схема тензоэлектрического датчика является термостабильной и в целом не чувствительна к деформациям растяжения-сжатия балки.