КОРОТКИХ А.А. 10 КЛАСС

Шифр М(10)-8

№ задания	1	2	3	4	5	Общий балл	Подпись жюри
Первая проверка	7	2	2	0	0	11	
Вторая проверка	7	2	2	0	0	11	

Подпись председателя жюри

№1 1) Предположим, что все 10 человек - рыцари, тогда все сказали правду и нет ни одного числа, среди 10 задуманных, меньшего 1. в своем первом высказывании т.е. все числа >1, и есть число >10

Тогда из ~~Пос~~ вторых высказываний следует, что есть число <1, и все числа <10.

Получаем противоречие: $\begin{cases} \bullet \text{ все числа} > 1 \\ \bullet \text{ есть число} < 1 \end{cases}$ => среди 10 человек есть хотябы 1 лжец

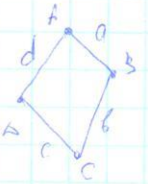
2) Тогда рыцарей не более 9. Это возможно.

Пример:

№	Человек	Задуманное число	1 высказывание	2 высказывание
1	рыцарь	1,5	>1	<2
2	рыцарь	2,5	>2	<3
3	рыцарь	3,5	>3	<4
4	рыцарь	4,5	>4	<5
5	рыцарь	5,5	>5	<6
6	рыцарь	6,6	>6	<7
7	рыцарь	7,7	>7	<8
8	рыцарь	8,8	>8	<9
9	рыцарь	9,8	>9	<10
10	лжец	5	>10	<1

Ответ: 9 рыцарей.

№2 Дано: $a, b, c, d \in N$ $a+b+c+d = 10^{100}$, ABCD – выпуклый 4х угольник



$a+b+c \vdots d \Rightarrow a+b+c = d\cdot\varphi$, ~~$\varphi \in Z, \varphi \neq 0$~~

$b+c+d \vdots a$ $b+c+d = a\cdot\alpha$

$c+d+a \vdots b$ $c+d+a = b\beta$

$d+a+b \vdots c$ $d+a+b = c\cdot\gamma$, $\varphi, \alpha, \beta, \gamma \in N$

тогда $10^{100} = a+b+c+d = a(\alpha+1) = b(\beta+1) = c(\gamma+1) = d(\varphi+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{100} \vdots a, b, c, d$ $10^{100} = 2^{100}5^{100}$, тогда

$a = 2^{k_1}\cdot 5^{n_1}$, $b = 2^{k_2}\cdot 5^{n_2}$, $c = 2^{k_3}\cdot 5^{n_3}$, $d = 2^{k_4}\cdot 5^{n_4}$,

Предположим 1) что $a=b=c=d$, тогда

$a = 2^k\cdot 5^n$

$10^{100} = 4\cdot 2^k\cdot 5^n \Rightarrow a = 2^{98}\cdot 5^{100} \in N \Rightarrow$ возможно

2) что $a \neq b, c, d$, $b=c=d=2^{k_2}\cdot 5^{k_2}$

$2^{100}\cdot 5^{100} = a(\alpha+1) = 2^{k_1}\cdot 5^{n_1} + \underbrace{3\cdot 2^{k_2}\cdot 5^{n_2}}_{\vdots a} = 2^{k_1}5^{n_1}(1+3\cdot 2^{k_2-k_1}\cdot 5^{k_2-k_1})$

$2^{100}\cdot 5^{100} \vdots (1+3\cdot 2^{k_2-k_1}\cdot 5^{k_2-k_1})$, это возможно только при $k_1 = k_2$, тогда ?

$a=b=c=d \Rightarrow$ противоречие с предположением.

3) что $a \neq b, c, d$, $b \neq a, d, c$, $d=c=2^{k_3}\cdot 5^{n_3}$, $b = 2^{k_2}\cdot 5^{n_2}$

$10^{100} = a(\alpha+1) = 2^{k_1}\cdot 5^{n_1}(1+2^{k_3+1-k_1}\cdot 5^{n_3-n_1}+2^{k_2-k_1}\cdot 5^{n_2-n_1})$

$10^{100} \vdots (1+2^{k_3+1-k_1}\cdot 5^{n_3-n_1}+2^{k_2-k_1}\cdot 5^{n_2-n_1})$, верно при $k_2=k_1$, $n_2=n_3=n_1 \Rightarrow a=b$ А при других??

4) что все стороны различны, сторона a – ~~...~~ наибольшая $> b, c, d$.

$10^{100} = a(\alpha+1) = 2^{k_1}\cdot 5^{n_1}(1+2^{k_2-k_1}\cdot 5^{n_2-n_1}+2^{k_3-k_1}\cdot 5^{n_3-n_1}+2^{k_4-k_1}\cdot 5^{n_4-n_1})$

$10^{100} \vdots (1+2^{k_2-k_1}\cdot 5^{n_2-n_1}+2^{k_3-k_1}\cdot 5^{n_3-n_1}+2^{k_4-k_1}\cdot 5^{n_4-n_1})$

М(10)-8

№3

$a_1\ a_2 \dots\ a_{2019}$ $\quad A = \{a_1, a_2 \dots a_{2019}\}$ $\quad A = B$

$b_1\ b_2 \dots\ b_{2019}$ $\quad B = \{b_1, b_2, \dots b_{2019}\}$ $\quad a_n \neq b_n$, $a_i \neq a_j$

иррациональное$_1$ + иррациональное$_2$ = рациональное, - назовем это „правильной парой"
$a_n + b_n$ = рациональное.

1) Запишем 1009 различных иррациональных чисел таких, что никакие 2 в сумме не дают рациональное.

2) Для каждого из 1009 иррац. допишем ?"иррациональное в сумме с которым оно дает рациональное". Итого 2018 чисел. Должно быть 2019 чисел => дописываем 1 рациональное. Но все иррациональные также различны между собой.

В сколько пара

3) При правильном заполнении (т.е. $a_n + b_n$ = рац) все иррациональные разобьются на правильные пары, тогда у единственного рационального в наборе не будет пары отличной от него. может участвовать чисел

=> противоречие => 2018 иррациональных быть не может.

4) Тогда убираем одну „правильную пару" иррациональных чисел и записываем 2 рациональных числа.

Чел.

5.) В новом заполнении получится 2016 правильных пар иррациональных чисел ($a_n \neq b_n$) удовлетворяющих условию и 3 пары рациональных чисел, так же удовлетворяющих условию =>

=> в верхней строке может быть не более 2016 иррациональных чисел.

- 2019 иррациональных быть не может, т.к в этом случае какое-то число останется без пары, т.е получится, $a_n = b_n$ и $a_n + b_n$ = рац => $2a_n$ = рац, чего быть не может.

- 1009 - максимально возможное кол-во пар из 2019 чисел.

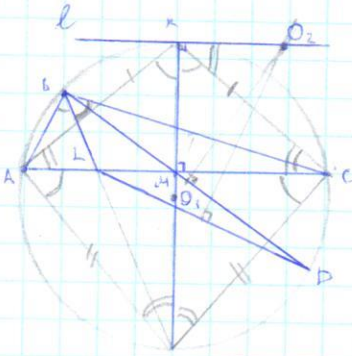
Если каждое число в двух парах? Ч.а

Ответ: max = 2016 иррациональных чисел.

Где пример?

М(10)-8

№5



Дано: $\triangle ABC$ - не р/б. BL - бис., BM - мед. $BM \cap \omega = D$ O_1 - центр ω
$l \parallel AC$, O_2 - центр окр-ти, оп. около $\triangle BDL$ $O_2 \in l$.

Док-ть: l касается ω

Решение: Пр. $MK \perp AC$, $K \in l$.
MK - ср. $\perp \Rightarrow O_1 \in MK$.
$AC \parallel l \Rightarrow MK \perp l$

док-ть: $K \in \omega$

Пусть $MK \cap \omega = K_1$.
$\triangle$ ~~__~~ AK_1C - р/б.

КОРОТКИХ А.А. 10 КЛАСС

Шифр М(10)-08

№ задания	~~1~~ 6	~~2~~ 7	~~3~~ 8	~~4~~ 9	~~5~~ 10	Общий балл	Подпись жюри
Первая проверка	7	7	1	0	0	15	
Вторая проверка	7	7	1	0	0	15	

Подпись председателя жюри

№6 $a-1,\ a,\ a+1,\ a+2\ > 100$

среди них: • 2 числа $\vdots 2$, 2 числа дающих остаток 1 при делении на 2
• есть 1 число или 2 кратное 3.

Докажем, что среди них можно выбрать 3 числа, удовлетворяющие условию.

1 случай $(a-1) \not\vdots 2$, тогда берем числа $a-1,\ a,\ a+1$.

1) они подряд идущие $\Rightarrow$ среди них есть число $\vdots 3$, другие два имеют различные остатки при делении на 3 (2 или 1 соответственно) $\Rightarrow$ их сумма $\vdots 3$.

2) $(a-1) \not\vdots 2 \Rightarrow (a+1) \vdots 2,\ a \vdots 2 \Rightarrow (a-1)+a+(a+1) \vdots 2$.

3) $(a-1)+a+(a+1) > 6$, т.к $a-1,\ a,\ a+1 > 100,\ 100 > 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-1)+a+(a+1) > 2\cdot 3$, тогда.

$(a-1)+a+(a+1) = 2\cdot 3\cdot n$, причем $n \neq 2,\ n \neq 3,\ n \in N$,

$n \neq 2$ и $n \neq 3$, т.к $2\cdot 3\cdot 2$ и $2\cdot 3\cdot 3$ меньше 100

$\Rightarrow$ при $(a-1) \not\vdots 2$ - условие выполняется

2 случай $(a-1) \vdots 2$. тогда берем числа $a,\ a+1,\ a+2$.

1) они подряд идущие $\Rightarrow$ их сумма $\vdots 3$

2) $(a-1) \vdots 2 \Rightarrow a$ и $a+2 \not\vdots 2 \Rightarrow a+a+2 \vdots 2 \Rightarrow (a+a+1+a+2) \vdots 2$
$a+1 \vdots 2$

3) $a+a+1+a+2 > 100+100+100 = 300$.

$(a+a+1+a+2) \vdots 2,\ \vdots 3$

$a+a+1+a+2 = 2\cdot 3\cdot n > 300$

$2\cdot 3\cdot n > 300 \Rightarrow n > 50$, $2 < 50,\ 3 < 50 \Rightarrow n \neq 2,\ n \neq 3$

$\Rightarrow$ условие выполняется

1сл и 2сл $\Rightarrow$ условие выполняется при любых четырех последовательных числах больших 100

7.7 б.

М(10)-08

№7 Дано: $b > a > 1$, $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$

Док-ть: $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$

Док-во: Докажем по индукции.

База $x_1 > x_2 \Leftrightarrow 2^1\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) > 4\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right)$

$2\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a}\right) > 2\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right)\cdot 2.$

$b > a > 1 \Rightarrow \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a} > 0$ $\sqrt[4]{b} > 1$, $\sqrt[4]{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a} > 2$

Шаг индукции. Пусть до $n = k$ $x_1, x_2, \ldots x_k$ – убывает. , $k \in N$.

$n = k+1$.

$x_k = 2^k\left(\sqrt[2^k]{b} - \sqrt[2^k]{a}\right)$ $x_{k+1} = 2^{k+1}\left(\sqrt[2^{k+1}]{b} - \sqrt[2^{k+1}]{a}\right) = 2^k\left(\sqrt[2^{k+1}]{b} - \sqrt[2^{k+1}]{a}\right)\cdot 2.$

$2^k\left(\sqrt[2^k]{b} - \sqrt[2^k]{a}\right) > 2^k\left(\sqrt[2^{k+1}]{b} - \sqrt[2^{k+1}]{a}\right)\cdot 2.$

$\Updownarrow$

$2^k\left(\sqrt[2^{k+1}]{b} - \sqrt[2^{k+1}]{a}\right)\left(\sqrt[2^{k+1}]{b} + \sqrt[2^{k+1}]{a}\right) > 2^k\left(\sqrt[2^{k+1}]{b} - \sqrt[2^{k+1}]{a}\right)\cdot 2 \;\Big|:$

$\Updownarrow$

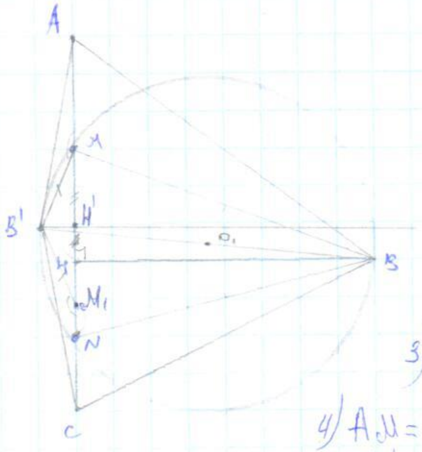
$\underbrace{\sqrt[2^{k+1}]{b}}_{>1} + \underbrace{\sqrt[2^{k+1}]{a}}_{>1} > 2$ – верно $\Rightarrow$ $x_k > x_{k+1}$.

$x_k > x_{k+1}$ – верно $\Rightarrow$ последовательность $x_1, x_2, \ldots$ – убывает

ч.т.д.

М1101-08

№8 1 из



Дано: BH - высота, M - сер AH, N - сер CH,
Ω - ок около $\triangle BMN$ BB' - диаметр Ω
Док-ть $AB' = CB'$.

Док-во 1) $B'H' \perp AC$.
2) Вл.? $M_1H' = MH'$, $M_1 \in AC$.
$B'H'$ - вжс и мед $\Rightarrow \triangle MB'M_1$ - р/б. $\Rightarrow$
$\Rightarrow MB' = M_1B'$, $\angle B'MM_1 = \angle B'M_1M \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle B'M_1C = \angle B'MA$ (вн углы $\triangle M_1B'M$)
3) Лемма $MA = CM_1$ не доказано.

4) $AM = CM_1$
$\angle B'M_1C = \angle B'MA$
$B'M_1 = MB'$
$\Rightarrow \triangle CB'M_1 = \triangle AB'M \Rightarrow \underline{AB' = CB'}$

3) $MA = CM_1$.

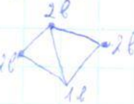
0 - 1

М1(10)-08

№9 $n \geq 4$. Пусть x – кол-во хороших раскрасок.

0 из

при $n=4$, $x = 2^3 \cdot 4$
$n = 5$ $x = 2^3 \cdot 5$



$\Rightarrow 2^3$.

Предположим, что $x = 2^3 \cdot n$.

База для $n = 4$
$n = 5$ – верно

для $n=4$ неверно $2^3 \cdot 4 = 32 > 16 = 2^n$
для $n=5$ $2^3 \cdot 5 = 40 > 32 = 2^n$

Шаг индукции: Пусть для $n=k$ верно
проверим для $n = k+1$.

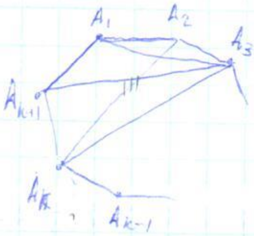
2^n – все возм. раскр для n верш.

$X_k = 2^3 \cdot k$ $\quad X_{k+1} = 2^3 \cdot k + 2^3$

Рассмотрим фигуру с $n=k$ и прибавим к ней вершину

1сл.

2сл.



2сл. – кол-во вариантов "хорошей" раскраски не увеличивается т.к A_{k+1} должно быть противоположного цвета с A_3. (единственной точке, с которой может быть соединено диагональю ~~без пары~~ без пересечения других диагоналей)
1случай + $2 \cdot 2^2$ хороших раскрасок (при присоединении A_{k+1} к месту, где A_i не соединено диагональю ни с одной из вершин кол-во хороших раскрасок увеличивается на 2^2, а таких мест 4 – по два рядом с каждой „свободной" вершиной.

„свободная" вершина – вершина не соединенная диагональю ни с одной другой.

Итого для $k+1$ $X_{k+1} = 2^3 \cdot k + 2^3 = 2^3(k+1) \Rightarrow$ верно.

Ответ: $x = 2^3 \cdot n$, где n – кол-во вершин.