ЗАГАЙМОВ Н.С. 10 КЛАСС

Шифр М(10)-05

№ задания	1 / 6	2 / 7	3 / 8	4 / 9	5 / 10	Общий балл	Подпись жюри
Первая проверка	7	0	–	–	0	7	
Вторая проверка	7	0	0	0	0	7	

Подпись председателя жюри

№ 6(1): Пусть первое натуральное число $= x$, тогда второе $= x+1$, третье $= x+2$, а четвёртое $= x+3$. Среди всех возможных сумм трех чисел из четырёх данных выделим две: $S_1 = x+(x+1)+(x+2) = 3x+3$ – сумма первого, второго и третьего числа и $S_2 = (x+1)+(x+2)+(x+3) = 3x+6$ – сумма второго, третьего и четвёртого числа.

Обе суммы делятся на 3: $S_1/3 = (3x+3)/3 = x+1$; $S_2/3 = (3x+6)/3 = x+2$.

Допустим, что $(S_2/3)$ не делится на 2, т.е. $x+2$ – нечётное, тогда $x+1 = S_1/3$ – чётное $\Rightarrow$ делится на два. $\Rightarrow$ либо $S_2/3$ делится на 2, либо $S_1/3$ делится на 2.

Заметим, что $S_1/3 = x+1$ равно второму числу, соответственно, т.к. по условию числа больше 100, то результат от деления этих чисел на 2 точно больше 50 $\Rightarrow$ при условии, что $S_1/3$ делится на 2, при делении $S_1/3$ на 2 мы получим некое натуральное число K, большее 50.

Аналогично заметим, что $S_2/3 = x+2$ равно третьему числу, которое по условию больше 100 $\Rightarrow$ при условии, что $S_2/3$ делится на 2, деление $(S_2/3)$ на 2 даст натуральное число K, большее 50.

Исходя из вышеизложенного, одна из сумм S_1 и S_2 точно может быть разложена на произведение 2, 3 и K, где K – натуральное; $K > 50$. Ч.т.д.

М(10)-05

№7(2): $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$; $x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$

Чтобы доказать, что последовательность $x_1, x_2 \ldots$ убывает, вычтем из x_n x_{n+1}:

$2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right) - 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a} - 2\cdot\sqrt[2^{n+1}]{b} + 2\cdot\sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$; Т.к. в разности нас интересует только знак, а 2^n - положительный множитель, не меняющий знак выражения, то мы можем его отбросить. Имеем: $\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a} - 2\cdot\sqrt[2^{n+1}]{b} + 2\cdot\sqrt[2^{n+1}]{a}$. Заносим двойки под корень, а корни вида с основанием 2^n приводим к основанию 2^{n+1}: $\sqrt[2^{n+1}]{b^2} - \sqrt[2^{n+1}]{a^2} - \sqrt[2^{n+1}]{b\cdot 2^{2^{n+1}}} + \sqrt[2^{n+1}]{a\cdot 2^{2^{n+1}}}$

Т.к. в разности нас интересует только знак, а корень - возрастающая функция, то для того, чтобы узнать знак достаточно сравнить аргументы корней: $b^2 - a^2 - b\cdot 2^{2^{n+1}} + a\cdot 2^{2^{n+1}}$; после группировки имеем:

$\cancel{b(b-2^{2^{n+1}}) - a(a-2^{2^{n+1}})}$ $b(b-2^{2^{n+1}}) + a(2^{2^{n+1}}-a) = b(b-2^{2^{n+1}}) - a(a-2^{2^{n+1}})$

$\cancel{b > a > 0 \Rightarrow}$ $b > a$; $b > a$

$b - 2^{2^{n+1}} > a - 2^{2^{n+1}}$

~~Анализируя полученную формулу, понимаем, что b.~~

ЗАГАЙНОВ М.С. 10 КЛАСС

Шифр М (10)-5

№ задания	1	2	3	4	5	Общий балл	Подпись жюри
Первая проверка	7	0	2	0	0	9	
Вторая проверка	7	0	2	0	0	9	

Подпись председателя жюри

№1: Предположим, что человек, сказавший „Моё число больше 10", сказал правду. Если он рыцарь, то и второе высказывание должно быть правдивым, но любое ~~второе~~ высказывание „Моё число меньше x", где $x \leq 10$ означает, что число точно ~~...~~ меньше 10. Приходим к противоречию. Выходит, что среди этих 10-и человек, как максимум, 9 рыцарей. Попробуем составить пример с 9 рыцарями и 1 лжец. Пусть x-ый рыцарь сказал: „Моё число больше, чем x", а затем „Моё число меньше, чем x+1", тогда примером его загаданного числа может быть $\frac{2x+1}{2}$. Для лжеца останутся два высказывания: „Моё число больше 10" и „Моё число меньше 1", и, если он загадал, к примеру, 9, то он оба раза солгал => пример удовлетворяет условию => ~~Минимальное~~ Максимальное кол-во рыцарей среди 10 человек = 9.

Ответ: 9

Почему он единственный ?

№3. Единственный случай, когда сумма иррационального числа с любым другим ~~...~~ равна рациональному – когда суммируются два иррациональных числа, ~~...~~ одно из которых получено посредством прибавления иррационального числа к рациональному (в дальнейшем ~~...~~ такие числа называются числами типа ir^+), а второе получено путём вычитания из любого рационального числа того же иррационального числа (в дальнейшем – числа типа ir^-). Почему?

Т.к. всего ячеек 2019, то разбить ячейки на 2 типа ir^- и ir^+ не получится => придётся взять 1 рациональное число, 1009 чисел типа ir^- и к каждому из них соответствующее число типа ir^+ (где все числа ir^- и ir^+ – разные), но тогда одно рациональное число будет стоять в столбике либо с самим собой (что противоречит условию), либо с иррациональным числом, а тогда сумма столбика будет иррациональной, что также противоречит условиям. => придётся взять 2 рациональных числа, но тогда при разбиении оставшихся 2017 ячеек одному числу типа ir^- не будет соответствовать число типа ir^+ (т.к. 2017 – нечётное) (или наоборот) => придётся взять 3 разных рациональные числа; 1008 разных чисел типа ir^- и к каждому из них ~~...~~ соответствующее число ir^+, а оставшиеся рациональные числа расставить так, что в столбце с первым было второе; со вторым – третье; с третьим – первое.

Т.к. сумма двух рациональных чисел равна рациональному числу, как и сумма чисел вида ir^+ и ir^-, то в этом случае нам удаётся ~~...~~ расставить числа => Всего в первой строке может быть 2016 иррациональных чи

Ответ: 2016

Еще бы мне было это ясно.

№2: Методом полного перебора по одной из сторон становится ясно, что единственно возможный набор сторон a, b, c, d, удовлетворяющий условиям задачи – $a=b=c=d=25\cdot10^{18} \Rightarrow$ Фигура – ромб ■