

Российская Федерация
Республика Марий Эл

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение Республики Марий Эл
«Многопрофильный лицей-интернат»

№ _____

« _____ » _____ 20__ г.

425231, Республика Марий Эл,
Медведевский район, п. Руэм, ул. Победы, 1
Телефон: 53-75-30

БАЗАНОВ В.В. 11 КЛАСС

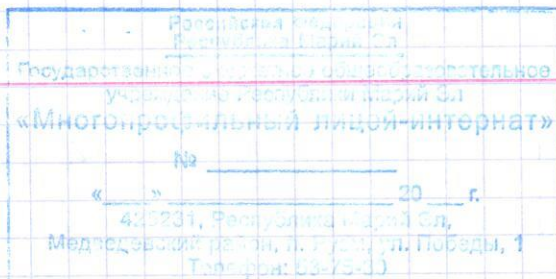
Шифр

М111)-02

№ задания	1	2	3	4	5	Общий балл	Подпись жюри
Первая проверка	7	6	7	0	0	20	
Вторая проверка	7	6	7	0	0	20	
Подпись председателя жюри							

№1 Допустим, рыцари - все 10 человек. Расположим 2-ух человек, которые сказали во 2 раз, что их число < 1 и < 2 соответственно. В 1 раз каждый сказал, что его число больше 1, больше 2 и т.д. П.к. они рыцари, то это истина, а значит все задуманные числа лежат в промежутке от 2 до 10 включительно. Но ни одно число не подходит условию меньше 1 или меньше 2, а значит для человека солгали $\Rightarrow$ 10 рыцарей быть не может. Максимальной кол-во рыцарей $= 10 - 2 = 8$ рыцарей. Пример с 8 рыцарями легко строится:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I раз	> 1	> 2	> 3	> 4	> 5	> 6	> 7	> 8	> 9	> 10
II раз	< 3	< 4	< 5	< 6	< 7	< 8	< 9	< 10	< 1	< 2
Число	2	3	4	5	6	7	8	9	5	5
Итого	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л
Итого : 8 рыцарей										



У2 Рассмотрим 3-х члены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + ax + b + 1$.
Известно, что корни - целые, а значит ^{разности} корней (т.к. корней может быть несколько, но будем иметь ввиду разность больших корней) - тоже целая.

Большой корень 1 трехчлена

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}; \quad D_1 = a^2 - 4b \text{ (т.к. есть}$$

целые корни, то $D_1 \geq 0$, D_1 - точный квадрат

$$x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2}; \text{ аналогично для } D_2$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-a + \sqrt{D_1}}{2} - \frac{-a + \sqrt{D_2}}{2} = \frac{\sqrt{D_1} - \sqrt{D_2}}{2} - \text{целое} \rightarrow$$

$\sqrt{D_1} - \sqrt{D_2}$ - целое.

Вспомним тот факт, что квадраты натуральных чисел (здесь и далее под натуральными числами будем понимать все натуральные числа и 0) можно представить как сумму четных чисел, т.е.:

0	0+1	0+1+3	0+1+3+5
0 ²	1 ²	2 ²	3 ²
n	n+1	n+2	n+3

Заметим, что D_1 и D_2 отличаются друг от друга на 4 ($|D_1 - D_2| = 4$), а т.к. D_1 и D_2 - точные квадраты, то они равны тем квадратам, разность

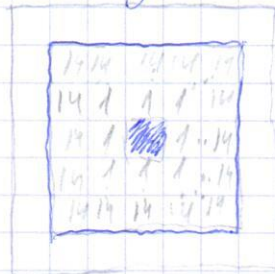
которая равна 4. Это числа 0 и 4. Эти числа
единственные удовлетворяют условию, т.к. ~~ни~~ ~~х~~ ~~лишь~~
нах разности n и любую квадрата же n увеличивается
с увеличением n , т.е. $4^2 - 3^2 > 3^2 - 2^2$ — наоборот, она
равняется 4 (покажем $2^2 - 0^2$) $\Rightarrow P_1 = 4, P_2 = 0$

Рассмотрим 3-й 3-х член $x^2 + ax + b + 2$
Его дискриминант $D_3 = a^2 - 4b - 8$. Сравнивая с D_1 , получаем,
что они отличаются на 8 ($P_1 - 8 = P_3$), а т.к. $P_1 = 4$,
то $D_3 = 4 - 8 = -4$; $D_3 < 0 \Rightarrow x$ не сущ. $x^2 + ax + b + 2$
корней не имеет и т.д.

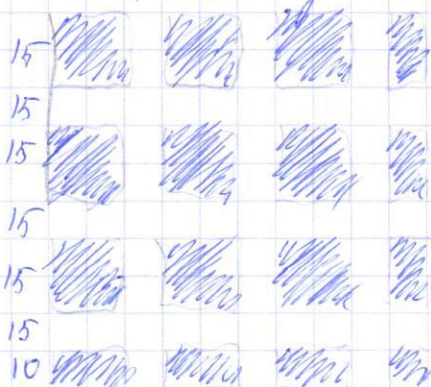
Государственный архив Московской области
Муниципальное учреждение культуры «Историко-просветительский лицей-интернат»
12 _____ г.
«___» _____ 20__ г.
г. Щербинин, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Победы, 1
Тел./факс: 80-75-20

Б3 Рассмотрим произвольную клетку доски, отметив её крестом.

П.к. шахматный король может двигаться по диагонали, вперед, назад, влево, вправо на 1 клетку, но вокруг него можно построить ряды клеток - заданно пустых (клетки, до которых он доберется с наименьшим кол-вом ходов = 15). Эти ряды образуют квадрат (сторона отмеченного квадрата = 29)



Отметив соседнюю клетку, получим квадрат пустой смещенный на клетку. Отмечая таким образом все возможные клетки внутри, получим квадраты из отмеченных клеток размером 15×15 , который имеет внутри большего, "пустого" квадрата размером 45×45 (его клетки заданно пустые). Баставляем такие квадраты размером 15×15 на доске (первый придем к углу, чтобы получить наименьшую расстановку). Получаем подобную расстановку (между квадратами расстояние 15)

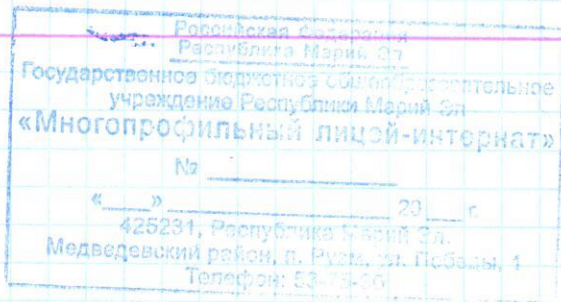


П.к 100 не кратно 15, то некоторые "квадраты" (прямоугольники) узданы. Это 10 отмеченных точек:
 $4 \cdot 15 \cdot 15 + 6 \cdot 10 \cdot 15 + 1 \cdot 10 \cdot 10 =$
 $= (3 \cdot 15)^2 + 2 \cdot 10 \cdot (3 \cdot 15) + 10^2 =$
 $= (3 \cdot 15 + 10)^2 = 55^2 = 3025$

Умно : 3025 ~~отличных~~ ~~клеток~~ (55² ~~клеток~~)



УЧ. П.к. все степени членов многочлена $P_n(x)$ четны,
и потому имеет степенной вид, то график
 $y = P_n(x)$ является параболой с ветвями вверх. Однако
при малых x функция принимает вид синусоидный вид.
При увеличении n кол-во волн увеличивается..



Шифр ММ-10							
№ задания	1	2	3	4	5	Общий балл	Подпись жюри
Первая проверка	7	0	0	0	0	7	
Вторая проверка	7	0	0	0	0	7	
Подпись председателя жюри							

56

Запишем 4 последовательных натуральных числа как n ; $n+1$; $n+2$; $n+3$; где n - натуральное, >100

I Если n чётно, то просуммируем последние 3 числа (т.е. $n+1$; $n+2$; $n+3$)

$$n+1 + n+2 + n+3 = 3n+6$$

Заметим, что т.к. n - натуральное, то $3n+6$ делится без остатка на 3 ($3n$ делится на 3 и 6 делится на 3)

$$(3n+6) : 3 = n+2$$

Далее, т.к. n - чётно, то $n+2$ делится (здесь и далее делится без остатка) на 2:

$$(n+2) : 2 = \frac{n}{2} + 1$$

$\frac{n}{2} + 1$ - целое натуральное число

Докажем, что $\frac{n}{2} + 1$ не равен 2 или 3 (т.е. все числа различные):

Допустим:

$$\frac{n}{2} + 1 = 2$$

$$n = 2$$

$$\frac{n}{2} + 1 = 3$$

$$n = 4$$

Но по условию $n > 100$ - противоречие $\Rightarrow$

$\frac{n}{2} + 1 \neq 2$; $\frac{n}{2} + 1 \neq 3 \Rightarrow$ сумму 3 данных чисел можно представить как произведение различных натуральных чисел (т.е. $2 \cdot 3 \cdot (\frac{n}{2} + 1) = 3n+6$)

II Если n - нечетно, то рассмотрим первые 3 числа
($n, n+1, n+2$)

$$n + n+1 + n+2 = 3n+3$$

Заметим, что т.к. n - натуральное, то
 $3n+3$ делится на 3 (По аналогичным причинам)

$$(3n+3):3 = n+1$$

Также, т.к. n - нечетно, то $n+1$ делится на

2

$$(n+1):2 = \frac{n+1}{2}$$

$\frac{n+1}{2}$ - целое натуральное число

Допустим, что $\frac{n+1}{2}$ не равно 2 или 3

Рассмотрим, что это так. Тогда,

$$\frac{n+1}{2} = 2$$

$$n = 3$$

$$\frac{n+1}{2} = 3$$

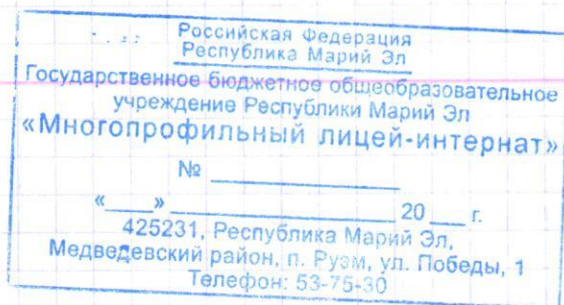
$$n = 5$$

Но $n > 100$ - противоречие $\Rightarrow$

Все числа различны $\Rightarrow$ сумму 3 данных чисел
можно представить как произведение 3 различных
натуральных чисел ($2 \cdot 3 \cdot (\frac{n+1}{2}) = 3n+3$)

$\Downarrow$

Сумму 3 чисел из последовательных натуральных ч.,
больших 100 можно представить как произведение
3 различных натуральных чисел, т.е. д.



59 Для упрощения понимания условия задачи будем
 составлять модель календаря посещений (из числа
 от 1 до 30 - порядковый номер дня)

1 2 3 ...
 ... 29 30

Будем считать во вторник посещения все дни
 подряд, т.к. на ^{ответ} ~~ответ~~ это не влияет (т.к. дни
 можно поменять местами).

Т.к. кол-во учеников m , и все кол-ва посещений
 различны, то будем учитывать, что максимальное кол-
 во посещений для одного ученика - m (т.к. надо найти
 наибольшее возможное m , то кол-во посещений будет
 от 1 до m , чтобы как можно больше дней осталось
 свободными).

По условию нам требуется, чтобы для любых двух
 учеников был день когда 1 посещал бассейн, а другой нет и
 наоборот, т.е. если представить посещения линиями* на
 модели, то одна линия не должна полностью
 содержать в себе другую. Однако, чтобы кол-во „занятых“
 дней оставалось минимальным, линии должны содержать
 части друг друга (когда это возможно).

* под словом линии понимаются отрезки на оси,
 которые соединяют 1-ый и последний день посещения.

Т.е. на подм. это будет выглядеть так:

... 5 6 7 8 9 ... (Также учитываем, что линии разной длины)

Начнем составлять подм. (номер ученика = кол-во его посевов.)

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

В процессе заполнения мы видим, что каждый ученик занимает по 2 соседних дня (кроме первого) (1 день "идет" на сохранение условия, а 2 - на увеличение длины)

Значит можем составить формулу для m

$m = \frac{k-1}{2} + 1$ (Из k дней вычитаем 1, который занимает первый ученик, делим на 2 и прибавляем

первого ученика) Подставляем $k=30$ получаем

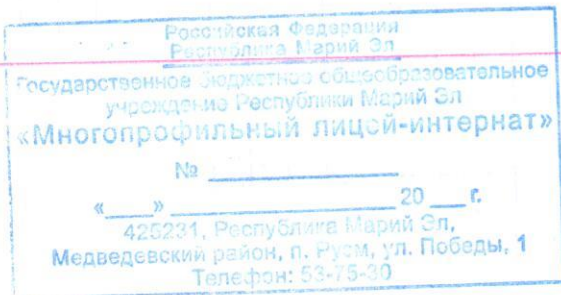
$$m = \frac{30-1}{2} + 1 = 15$$

Итого 15 учеников

Но допустим, что учеников $m=16$. Тогда максимальная длина = 16. Начнем заполнять подм. с конца по новым условиям

11	12	13	<u>14</u>	<u>15</u>	16	17	18	19	20
21	22	23	<u>24</u>	<u>25</u>	26	27	28	29	30

Из кс. видно, что k -ый ученик занимает до $m-k$ дня (включ.) но тогда 16 ученик займет до 0 дня - такого быть не может



№10 Сумма чисел $= 1$, а кол-во чисел $2 \cdot n$ неограничено (имеется ввиду, что $n \geq 2$). Тема требует максимизировать произведение чисел A и B (* или x_i и x_j), т.е. выбрать такие числа A , что $A \cdot B - \max$; $A - \max$, $B - \max$. Но кроме чисел A и B есть и другие. Среднее арифметическое $= \frac{1}{2n}$, но т.к. нам нужно максимизировать числа, то нужно макс. и $\frac{1}{2n}$, т.е. n должно быть минимальным, т.е. $n = 2 \Rightarrow$ мы имеем 4 неотрицательных числа [Равное среднее подходит не всегда, но оно помогает понять, что n должно быть минимальным, чтобы не "распаляться" на остальные числа]. Пусть среди 4 чисел будет два 0. Тогда Вася расставит числа так $A \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} B$: наибольшее произведение $= 0 \Rightarrow$

два 0 быть не может. Однако возможен один 0. (он должен быть только $\neq$ один, т.к. ноль не влияет на сумму чисел, а среднее чисел x_1, x_2, x_3 увеличивает)

Пусть $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$. Тогда Вася может расставить числа так $\begin{smallmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{smallmatrix}$ (возможна и др. расстановка).

Заметим, что при любой расстановке, которую делает Вася, x_1 стоит рядом с x_3 или x_2 . Числа Вася было без разницы, что именно поставить с x_1 , сделав $x_2 = x_3 = B$. Пусть $x_1 = A$

Запишем систему уравнений по данным условиям

$$\begin{cases} A + 2b + 0 = 1 \\ A \cdot b = \max \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 - 2b \\ b(1 - 2b) = \max \end{cases}$$

$$b - 2b^2 = \max$$

Найдем производную

$$1 - 4b = 0$$

$$b = 0,25 \Rightarrow$$

$$A = 0,5$$

Т.е. при любой расстановке на доске будет произведение $Ab = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$

Итого. Наме понадобятся числа $0,5; 0,25; 0,25; 0$

На доске окажется число 0,125 (при любой игре Васи)

57

Рассмотрим случай, когда $a > 1$ и $0 < a < 1$ и $a = 0$

I При $a = 0$. Затем?

Последовательность $x_1, \dots, x_n$ можно представить как функцию
 $f(n) = 2^n (2^{\sqrt{n}} - 1)$

$f(n) = -2^n$ - данная функция убывает на всей
прямой $n \in [1; +\infty)$. $\Rightarrow$ последовательность убывает

II $0 < a < 1$

Аналогично преобразим последовательность в функцию $f(n)$
При $0 < a < 1$ выражение $2^{\sqrt{n}a} - 1$ отрицательно и возрастает при $n \rightarrow \infty$. Но данное выражение ограничено

(если $y = 2^{\sqrt{n}a} - 1$, y ограничена сверху $y = 0$)
 $y = 2^n$ - возрастает неограниченно (можно сказать
что 2^n возрастает бесконечно) вся функция

$f(n \rightarrow \infty) = 2^n (2^{\sqrt{n}a} - 1) = 2^\infty (\infty^a - 1)$, При $\infty^a = 1$

$f(n) = 2^\infty \cdot 0$ и т.к. выражение $\infty^a - 1$ отрицательно,

и мы лишь приближимся к нулю, то $f(n)$ -

? не возрастает, но $f(n) = 2^n (2^{\sqrt{n}a} - 1)$ - не возрастает и
не убывает при $a = 1$; $0 < a < 1$, то $\Rightarrow f(n) = 2^n \cdot$
 $(2^{\sqrt{n}a} - 1)$ при $0 < a < 1$ - убывает

III ~~Аналогично (как в II) выражение $2^{\sqrt{n}a} - 1$ ограничено~~
~~и убывает ($a > 1$), а выражение 2^n - бесконечно~~
~~во~~