Министерство образования и науки Республики Марий Эл
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Республики Марий Эл
«Йошкар-Олинский техникум сервисных технологий»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов по выполнению практических работ по дисциплине
ЕН.01 Математика

46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

2021г.

РАССМОТРЕННО на заседании ПЦК Общеобразовательных дисциплин и дисциплин направления «Социальная работа» Председатель П(Ц)К ______ / В.Н. Петрова/ Протокол №_1_ от «_31_»___08___20_21_ г.	УТВЕРЖДАЮ Зам. директора по УР ________/Н.П. Житомирова / «_31_»___08___20_21_ г.

Составитель: Житомирова Н.П., преподаватель первой квалификационной категории ГБПОУ Республики Марий Эл «ЙОТСТ»

Рецензенты:

1) Николаева Е.А., преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ Республики Марий Эл «ЙОТСТ»

Методические указания для студентов по выполнению практических работ.

Изложен ход практических работ, приведены задания для выполнения практических работ, контрольные вопросы, справочный материал, план отчета. Методические указания предназначены в первую очередь для студентов, а также преподавателей учреждений среднего профессионального образования

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящие методические указания составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине ЕН.01 Математика для студентов специальности 46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение. Программа предназначена для реализации требований ФГОС к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по данной специальности среднего профессионального образования и является единой для всех форм обучения.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

У1. Решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;

У2. Применять основные методы интегрирования при решении задач;

У3. Применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

Освоение учебной дисциплины должно способствовать формированию следующих общих компетенций:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности

Для закрепления теоретических знаний и приобретений необходимых практических знаний и умений рабочей программой по дисциплине «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

Практические работы выполняются для закрепления и систематизации теоретических знаний студентов по дисциплине и приобретения необходимых практических умений, развитию навыков самостоятельной работы.

Выполнение практических работ предусматривает применение необходимых формул и проведение соответствующих расчетов.

Цель методических указаний - обеспечить четкую организацию проведения практических занятий со студентами и предоставить возможность студентам, отсутствовавшим на практическом занятии, самостоятельно выполнить работу.

1. Указания к выполнению практических работ

1. Практические работы нужно выполнять в специально отведенной тетради в клетку, чернилами синего или черного цвета.
2. Условие каждого задания переписывается полностью или делается краткая запись «Дано» (если это возможно), затем выполняется решение задания и записывается ответ. Иногда ответ можно не записывать (ответом служит график, таблица и т.п.).
3. Все рисунки и схемы выполняются карандашом, с помощью линейки.
4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
5. Задания можно выполнять в произвольном порядке
6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.

2. Правила выполнения работы

1. Прочитайте название практической работы, уясните для себя цель работы.
2. Внимательно прочитайте пояснения к работе.
3. Разберите решения типовых примеров.
4. Выполните задания по вариантам.
5. Оформите отчет и сдайте тетрадь на проверку преподавателю.

3. Критерии оценки

Оценка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обоснованиях решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Оценка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Оценка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Оценка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

4. Методические указания к выполнению практических работ

4.1. Практическая работа 1. Решение задач по вычислению пределов функций

Цель работы: научиться вычислять предел функции в точке, решать задачи на установление, существования предела, непрерывности функции и определение точек разрыва.

Пояснения к работе

<u>Определение предела функции</u>

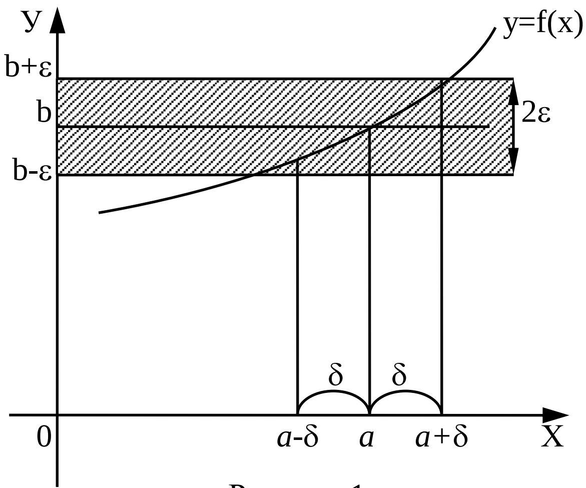


Рисунок 1

Число b называется *пределом функции* *f(x)* при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число δ, что $|f(x)-b|<\varepsilon$ как только $|x-a|<\delta$.

Если $f(x)\to b$ при $x\to a$, то на графике функции $y=f(x)$ это иллюстрируется следующим образом (рис.1): так как из неравенства $|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-b|<e$, то это значит, что для всех точек x, отстоящих от точки a не далее, чем на b, точки M графика функции $y=f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$.

Если $f(x)$ стремится к пределу b при x, стремящемся к некоторому числу a так, что x принимает только значения, меньшие a, то пишут $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ и b_1 называют *пределом функции в точке а слева*.

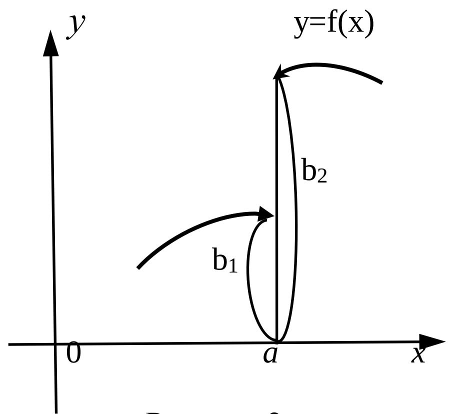


Рисунок 2

Если x принимает только значения, большие a, то пишут $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ и b_2 называют *пределом функции в точке а справа* (рис. 2).

Если предел справа и предел слева существуют и равны, т.е. $b_1=b_2=b$, то b и будет пределом в смысле данного выше определения предела в точке a. И обратно, если существует предел функции b в точке a, то существуют пределы функции в точке a справа и слева и они равны.

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $x=a$, если ее предел в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Аналогично определяются бесконечно малые при $x\to\pm\infty$, $x\to a+0$ и др.

Например, бесконечно малыми функциями являются:

1) $f(x)=x^2$ при $x\to 0$; 2) $y=x-2$ при $x\to 2$.

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке $x=a$, если ее предел в этой точке равен бесконечности: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

<u>Теорема</u>. *Если f(x) - бесконечно малая функция при x→ a, то* $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ -

бесконечно большая функция при $x \to a$ и наоборот.

Например, бесконечно большой является функция $y = \frac{2}{x-3}$ при $x \to 3$, т.е. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{x-3} = \infty$.

<u>Основные теоремы о пределах</u>

1. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных величин равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$$\lim(x+y+\ldots+t)=\lim x+\lim y+\ldots+\lim t$$

Например, $\lim\limits_{x \to 2}(3+x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 + \lim\limits_{x \to 2} x = 3+2=5$.

2. Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению их пределов:

$$\lim(x \cdot y \cdot \ldots \cdot t)=\lim x \cdot \lim y \cdot \ldots \cdot \lim t.$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

Например, $\lim\limits_{x \to -1}(5x-4) = \lim\limits_{x \to -1} 5x - \lim\limits_{x \to -1} 4 = 5 \lim\limits_{x \to -1} x - 4 = 5 \cdot (-1) - 4 = -9$.

3. Предел отношения двух переменных величин равен отношению пределов, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0.$$

4. Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной:

$$\lim x^n = (\lim x)^n$$

Например, $\lim\limits_{x \to -2}(x^3+3x^2) = \lim\limits_{x \to -2} x^3 + 3 \lim\limits_{x \to -2} x^2 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8+12=4$.

Пример №1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x \to -2}\left(2x^3-5x^2+7\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке.

Указание: В функцию, стоящую под знаком предела, подставить вместо x значение, к которому стремится аргумент.

$\triangle$ $\lim\limits_{x \to -2}\left(2x^3-5x^2+7\right) = 2 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + 7 = -16-20+7=-29$ ▲

Пример №2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ разложением функции на множители.

Указания:

1. Выписать квадратный трёхчлен отдельно и приравнять его нулю: $ax^2+bx+c=0$.
2. Найти корни получившегося квадратного уравнения.
3. Разложить квадратный трёхчлен, стоящий под знаком предела, на множители по формуле

$a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 –корни уравнения.

4. Сократить один из множителей.
5. Вычислить предел.

$\triangle$ Знаменатель функции, стоящей под знаком предела, представляет из себя квадратный трёхчлен. Разложим его на множители, решив квадратное уравнение:

$x^2-3x+2=0$; $D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot(-2)=9-8=1$; $x_1=\dfrac{3-\sqrt{1}}{2}=1$; $x_2=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2}=2$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{1-2}=-1.\blacktriangle$$

Пример №3. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$.

$\triangle$ Умножим числитель и знаменатель на сумму корней $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$, чтобы применить формулу сокращённого умножения $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}\right)^2-\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2+x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{2}{5\left(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}\right)}=$$

$$=\frac{1}{5\sqrt{2}}.\blacktriangle$$

__**Предел функции на бесконечности.**__

Пусть функция f(x) определена на всей числовой прямой. Число B называется

пределом функции f(x) при $x\to\infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$

Если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$: $x_т\neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, то говорят, что *предел функции f(x) в точке a есть бесконечность* и пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

Пример №4 Вычислить предел функции на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2}{5x^5+4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^6+x^4}{7x^5-5x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2}{6x^3-5}$.

Указания: Разделить все слагаемые числителя и знаменателя на старшую степень, содержащуюся в дроби. При этом, если старшая степень расположена в числителе, предел равен ∞, если в знаменателе, то предел равен нулю; если старшая степень знаменателя равна старшей степени числителя, предел равен отношению коэффициентов при них.

$\triangle$ а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2}{5x^5+4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^4}{x^5}+\dfrac{x^2}{x^5}}{\dfrac{5x^5}{x^5}+\dfrac{4x^2}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{5+\dfrac{4}{x^3}}=\frac{0+0}{5+0}=0$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^6+x^4}{7x^5-5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-x^6}{x^6}+\dfrac{x^4}{x^6}}{\dfrac{7x^5}{x^6}-\dfrac{5x^3}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{x^3}}=\left\{\frac{-1+0}{0-0}\right\}=\infty.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{6x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}}{\dfrac{6x^3}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{6-\dfrac{5}{x^3}}=\frac{1+0}{6-0}=\frac{1}{6}.\blacktriangle$$

<u>Замечательные пределы</u>

Первый замечательный предел

Теорема. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке x=0 существует и равен *единице*, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

Предел (1) называется *первым замечательным пределом* и применяется при вычислении ряда других пределов. Рассмотрим несколько примеров на применение предела (1).

Пример №5. Найдите предел функции $\frac{2\sin 5x}{8x}$ при x→0.

Указание: предел вида $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$ преобразуют так, чтобы использовать 1-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=a\cdot 1=a$.

$$\triangle\ \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 5x}{8x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{8x}=\frac{2}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\frac{1}{4}\frac{5}{1}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{4}\cdot 1=\frac{5}{4}=1{,}25\ \blacktriangle$$

Второй замечательный предел

Теорема. Предел функции $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при x→∞ существует и равен e, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (2)$$

Или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Предел (2) называется *вторым замечательным пределом* и применяется при вычислении ряда других пределов. *e = 2.718281…*

Число е - иррациональное число, е ≈ 2,72.

Пример №6. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^x$.

Указание: В пределах вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{bx}\right)^x$ сделать замену $\frac{a}{bx}=\frac{1}{y}$, откуда x= $\frac{a}{b}$ y.

$$\triangle\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{3}y}=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{5}{3}}=e^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{e^5}\ \blacktriangle$$

Пример №7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{8}{x}}=(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})^8=e^8$

Задание и ход работы

1. Вычислите пределы функций, заданные вариантам
2. Ответить на контрольные вопросы

Вариант 1

а) $\lim\limits_{x \to 2}\left(5x^3-6x^2+x-5\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x \to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x+3}{5x+1}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{7\sin 3x}{2x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 2

а) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^x}{5e^x-1}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x \to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{3x}{x-2}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2\sin 4x}{5x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^x$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 3

а) $\lim\limits_{x \to 4}\left(\sqrt{x}+\dfrac{5}{x+1}\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x \to -3}\dfrac{x+3}{x^2+7x+12}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^2-8}{2x-2}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{3\sin 4x}{2x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{z \to 0}(1+z)^{\frac{3}{5z}}$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 4

а) $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{3}{2x-6}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{7x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^x$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 5

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{x+3}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{4-\sqrt{2x-2}}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x}{3x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}}$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 6

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x-9}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 7x}{3x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{7x}\right)^x$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 7

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\sin\dfrac{x}{3}+1\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-9x+20}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-5x}-1}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{5x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{6}{x}}$, используя 2-й замечательный предел.

<u>Вариант 8</u>

а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+4x^2+x-7\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{3x^2+7x-6}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-2}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x}{3x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{7x}\right)^x$, используя 2-й замечательный предел.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Дайте определение предела функции в точке и на бесконечности.
2. Перечислите теоремы и следствия из них, на которых основано вычисление предела функции.
3. Что представляет собой число е?
4. Запишите формулы замечательных пределов.
5. Дайте определение односторонних пределов.

4.2 Практическая работа 2 Определение непрерывности функции, точек разрыва функции

Цель работы: закрепить навыки решения задач на установление, существования предела, непрерывности функции и определение точек разрыва

Пояснения к работе

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки *a*.Функция f(x) называется *непрерывной* в точке *a*, если предел этой функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Используя условия существования предела, можно написать условия непрерывности в следующей форме:

Функция f(x) непрерывна в точке *a*, если пределы справа и слева в этой точке равны значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

Функция *непрерывна на отрезке* [*a; b*], если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

Точками *разрыва* функции называются точки, в которых функция *не определена* или не является *непрерывной*.

Точки разрыва классифицируются следующим образом.

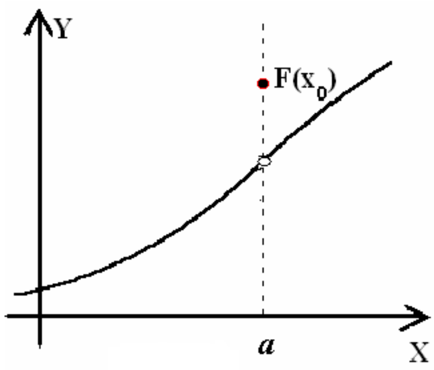


Рис. 5

Устранимый разрыв. Точка *a* называется *точкой устранимого разрыва* функции f(x), если предел функции в этой точке существует, но в точке *a* функция либо не определена, либо ее значение *f(a)* не равно пределу в этой точке (Рис. 5).

Разрыв 1-го рода. Точка *a* называется *точкой разрыва первого рода* функции *f(x)*, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x) \text{ (Рис. 6)}$$

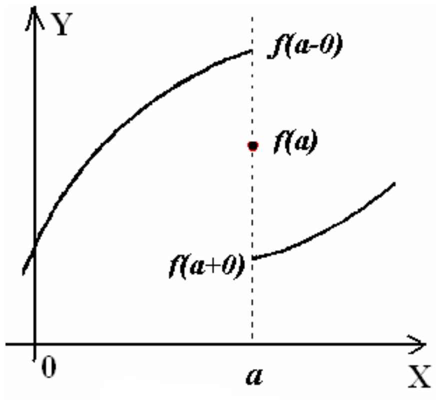


Рис. 6

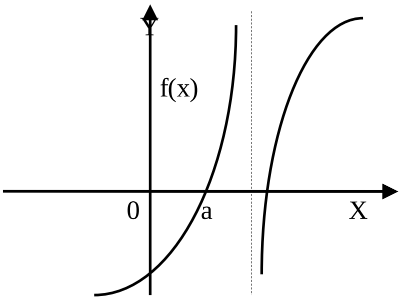


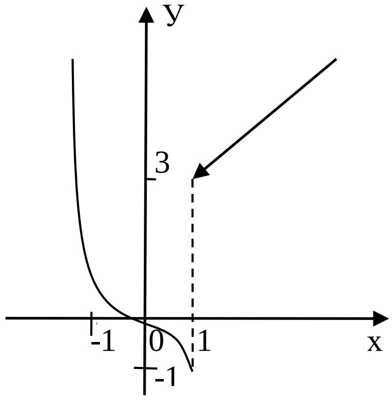
Рис. 7

Разрыв 2-го рода. Точка *a* называется *точкой разрыва второго рода* функции *f(x),* если в этой точке функция *f(x) не имеет* по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов *бесконечен* (Рис.7).

Кусочно-непрерывные функции. Функция *f(x)* называется *кусочно-непрерывной* на отрезке [a;b], если она непрерывна во всех внутренних точках [a;b], за исключением, быть может, *конечного* числа точек, в которых имеет разрыв 1-го рода и, кроме того, односторонние пределы в точках *a* и *b*.

Пример №1. Постройте график кусочно-непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & если \quad x \le 1 \\ 2+x, & если \quad x > 1 \end{cases}$$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.



$\triangle$ Функция кусочно-непрерывная. Построим график функции на участке (-∞; 1]. В этом случае f(x)=-x^3. Построим график по точкам, включая граничную x=1

x	-2	-1	0	1
y	8	1	0	-1

На промежутке (1;∞) функция f(x)=2+x. График функции – прямая. Строим по двум точкам – граничной x=1 и любой, например, x=3>1.

x	1	3
y	3	5

Стрелка показывает, что график стремится к точке (1;3), но не достигает, т.к. x=1 не входит в промежуток (1;∞).

Пределы слева и справа в точке x=1 – точке разрыва типа «скачок»:

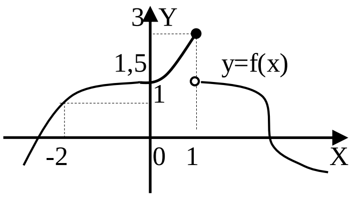
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1}(-x^3) = -1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1}(2+x) = 3. \blacktriangle$$

Пример №2. По графику функции определите

:а) Чему равно значение функции в точках x=-2, x=1?

б) Существует ли предел функции в указанных точках и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \ldots$).

в) Укажите характер разрыва функции в точках.



$\triangle$ а) f(-2)=1, f(1)=3.

б) Предел функции в точке x=-2 существует и $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$.

В точке x=1 предел не существует, т.к. левый предел не равен правому пределу функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 3 \neq \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1.$

в) В точке x=1 имеем разрыв типа «скачок». ▲

Пример №3. а) При каком значении А функция $y = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+7x+12} & при \quad x \neq -3 \\ A \quad при & x = -3 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x=-3?

$\triangle$ A= $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+7x+12} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{(x+3)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{-3+4} = 1.$ ▲

б) При каком значении А функция y=$\begin{cases} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} & при \quad x \neq 16 \\ A & при \quad x = 16 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x=16?

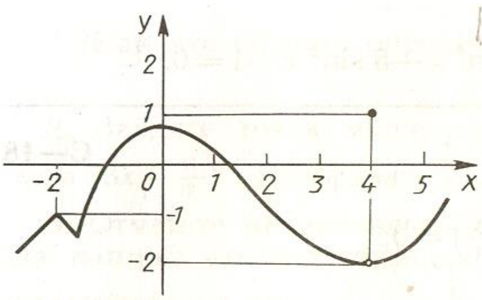
$\triangle$A= $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{(\sqrt{x})^2 - 4^2}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to 16}(\sqrt{x}+4) = \sqrt{16}+4 = 8.$ ▲

Задание и ход работы

1. Выполните задания по вариантам
2. Ответить на контрольные вопросы

1 вариант

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}\sin x, & если \quad x \le -\pi \\ x, & если \quad x > -\pi\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.

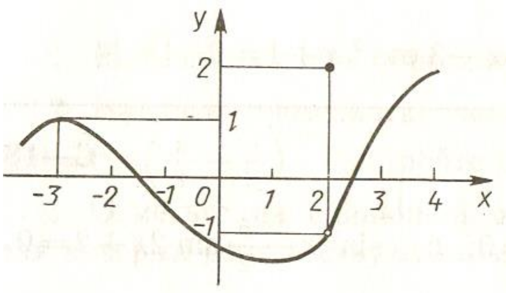


2. По графику функции определите:
а) Чему равно значение функции в точке x=4?
б) Существует ли предел функции в точке x=4 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \dots$).
в) Укажите характер разрыва функции в точке x=4.

3. При каком значении А функция $y=\begin{cases}\frac{x+5}{x^2+7x+10} & при \quad x \ne -5, \\ A \quad при \quad x=-5\end{cases}$ будет непрерывной в точке x=-5?

2 вариант

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & если \quad x \le 2 \\ 2x-3, & если \quad x > 2\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.

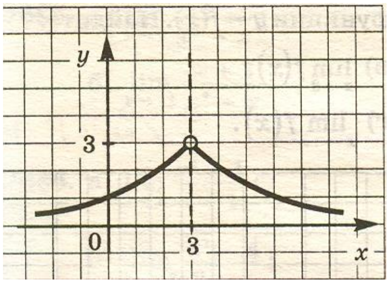


2. По графику функции определите:
а) Чему равно значение функции в точке x=2?
б) Существует ли предел функции в точке x=2 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dots$).
в) Укажите характер разрыва функции в точке x=2.

3. При каком значении А функция $y=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & при \quad x \ne 2, \\ A \quad при \quad x=2,\end{cases}$ будет непрерывной в точке x=2?

3 вариант

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & если \quad x\le 0 \\ x+1, & если \quad x>0 \end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.

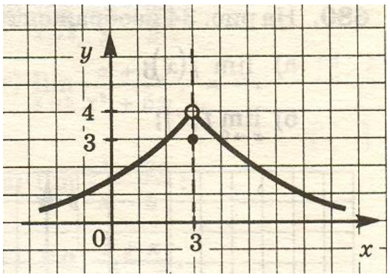


2. По графику функции определите:
а) Чему равно значение функции в точке х=3?
б) Существует ли предел функции в точке х=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ldots$).
в) Укажите характер разрыва функции в точке х=3.

3. При каком значении А функция $y=\begin{cases} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5} & при \quad x\ne 25 \\ A \quad при & x=25 \end{cases}$ будет непрерывной в точке х=25?

<u>4 вариант</u>

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & если \quad x\le -1 \\ x-3, & если \quad x>-1 \end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.

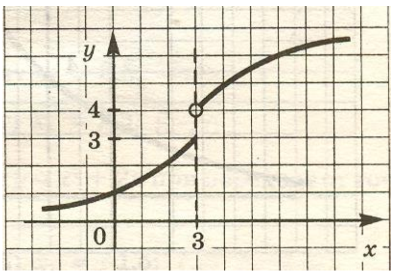


2. По графику функции определите:
а) Чему равно значение функции в точке х=3?
б) Существует ли предел функции в точке х=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ldots$).
в) Укажите характер разрыва функции в точке х=3.

3. При каком значении А функция $y=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+6x+8} & при \quad x\ne -2, \\ A \quad при & x=-2 \end{cases}$ будет непрерывной в точке х=-2?

<u>5 вариант</u>

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & если \quad x\le -1 \\ x-3, & если \quad x>-1 \end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.

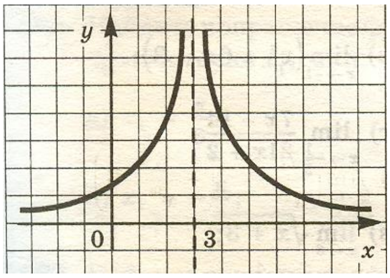


2. По графику функции определите:
а) Чему равно значение функции в точке х=3?
б) Существует ли предел функции в точке х=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ldots$).
в) Укажите характер разрыва функции в точке х=3.

3. При каком значении А функция $y=\begin{cases} \dfrac{x^2-49}{x-7} & при \quad x\ne 7, \\ A \quad при & x=7 \end{cases}$ будет непрерывной в точке х=7?

<u>6 вариант</u>

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & если \quad x \le -1 \\ x-3, & если \quad x > -1 \end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.



2. По графику функции определите:
а) Чему равно значение функции в точке x=3?
б) Существует ли предел функции в точке x=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \ldots$).
в) Укажите характер разрыва функции в точке x=3.

3. При каком значении A функция $y=\begin{cases} \dfrac{x-81}{\sqrt{x}-9} & при \quad x \ne 81 \\ A \quad при \quad x = 81 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x=81?

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

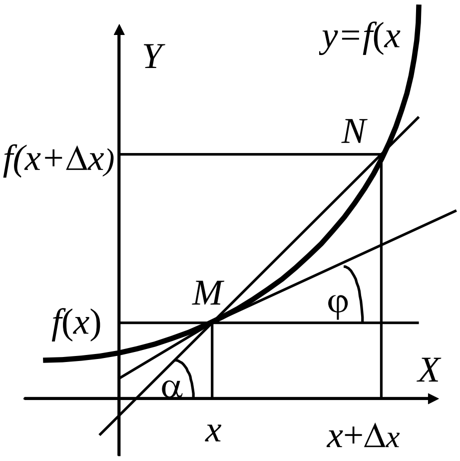
1. Перечислите необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.
2. Какие элементарные функции непрерывны на всей числовой прямой?
3. Чему равны односторонние пределы функции в точке a, в которой функция непрерывна?
4. Какая функция называется непрерывной на промежутке?
5. Как называются точки, в которых условия непрерывности не выполнены?
6. Каким свойством обладает функция в точке устранимого разрыва?
7. Какие точки называются точками разрыва типа «скачок»?
8. Как называются точки, в которых функция имеет хотя бы один односторонний предел бесконечен или не существует?
9. Приведите примеры функций, имеющих разрывы.

4.3 Практическая работа 3 Решение задач на нахождение производной

Цель работы: научиться вычислять производные элементарных и сложных функций, применять производные в решении прикладных задач.

Пояснения к работе

Определение производной функции



Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки x.

Пусть Δx - приращение (изменение) аргумента в точке x.

Обозначим через $\Delta y=\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ - приращение функции.

Отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ как видно из рисунка, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой $y = f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

Если существует предел отношения $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ в точке $\Delta x = 0$, то он называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается y' или $f'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется *дифференцированием.*

Если для любого числа x из открытого промежутка (a, b) можно вычислить $f'(x)$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на промежутке (a, b).*

Основные правила вычисления производной.

1. Производная *постоянной* равна нулю, т.е. $c'=0$.
2. Производная *аргумента* равна 1, т.е. $x'=1$.
3. Производная *алгебраической суммы* конечного числа дифференцируемых функций равна такой же *сумме производных* этих функций, т.е.

$$(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad (3)$$

4. Производная *произведения двух* дифференцируемых функций равна *произведению производной* первого сомножителя на *второй* плюс *произведение первого* сомножителя на *производную второго*, т.е.

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cu)'=c\cdot u' \qquad (5)$$

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Таблица производных основных элементарных функций

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Пример №1. Найдите производную функции:

а) f(x)=3x^4-$\frac{2}{x}$-5tgx+2sinx-2lnx+71;   б) g(x)=(3x-6)$\sqrt{x}$;   в) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

Указания: Используйте основные правила и формулы дифференцирования (таблицу производных).

△ а) Здесь следует использовать правило дифференцирования суммы (разности) функций (3) и выносить постоянный коэффициент за знак производной (5).

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

F′(x)=(3x^4-$\frac{2}{x}$-5tgx+2sinx-2lnx+71)′=(3x^4)′−$\left(\frac{2}{\tilde{o}}\right)'$−(5tgx)′+(2sinx)′- (2lnx)′+(71)′= =3(x^4)′−2$\left(\frac{1}{x}\right)'$−5(tgx)′+2(sinx)′−2(lnx)′+0=3·4x$^{4-1}$−2·$\left(-\frac{1}{x^2}\right)$−5·$\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$+2cosx-2·$\frac{1}{x}$ = =12x^3+$\frac{2}{x^2}$−$\frac{5}{\cos^2 x}$+2cosx−$\frac{2}{x}$.

б) Следует использовать правило дифференцирования произведения функций (4) и таблицу производных.

g ′(x)=(3x-6) ′ $\sqrt{x}$ + (3x-6)($\sqrt{x}$)′=(3·1-0) · $\sqrt{x}$ + (3x-6) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ =3 $\sqrt{x}$ + $\frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$.

в) Используйте правило дифференцирования частного функций (6) и таблицу производных.

$$y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'(x^2-1)-(x^2-1)'\sqrt{x}}{(x^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)-2x\sqrt{x}}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2} =$$

$(e^x)' = e^x$

$$= \frac{x^2-1-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2} = -\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$$

▲

Производная сложной функции.

Пусть функция *g*(*x*) имеет производную в точке *x*, а функция *f*(*z*) имеет производную в точке *z* = *g*(*x*). Тогда сложная функция *F*(*x*) = *f*(g(*x*)) имеет в точке *x* производную *F*′(*x*) = *f*′(*z*) g′(*x*).

Таблица производных сложных функций

2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$,   10. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$,

3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$,   11. $(e^u)' = e^u \cdot u'$,

4. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$,

5. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$,

6. $(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$,

7. $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$,

8. $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u}\dfrac{1}{\ln a}\cdot u'$,

12. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$,

13. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$,

14. $(arctgu)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$,

15. $(arcctgu)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Пример №2. Вычислите производную функции:
а) $f(x)=\sin^2 x$; б) $f(x)=\sin x^2$; в) $f(x)=\ln\cos x$; г) $f(x)=\cos(\ln x)$;
д) $f(x)=(x^3-3)^6$; е) $f(x)=\sqrt{3x^2+4}$; ж) $y=\arccos x^2$.

△ а) $f'(x)=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$; б) $f'(x)=\cos x^2\cdot(x^2)'=\cos x^2\cdot 2x=2x\cdot\cos x^2$;
в) $f'(x)=\dfrac{1}{\cos x}(\cos x)'=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-tgx$; г) $f'(x)=-\sin(\ln x)\cdot(\ln x)'=-\sin(\ln x)\cdot\dfrac{1}{\tilde{o}}$;
д) $f'(x)=6(x^3-3)^5\cdot(x^3-3)'=6(x^3-3)^5\cdot 3x^2=18x^2(x^3-3)^5$;
е) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+4}}\cdot(3x^2+4)'=\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+4}}\cdot 6x=\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$.
ж) $y'=(\arccos x^2)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot(x^2)'=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. ▲

Геометрический смысл производной: тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=f(x)$ равен первой производной этой функции, вычисленной в точке касания, т.е. $tg\alpha=f'(x)$

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Механическое значение производной. В физике производная от пути s по времени t равна *мгновенной скорости* - скорости тела в данный момент времени:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{x-x_0}{t-t_0}.$$

Пример №3. К параболе $y=3x^2-x$ в точке $x_0=-1$ проведена касательная. Составьте её уравнение.

△ Ордината точки касания $y(-1)$ составляет
$f(x_0)=3(-1)^2-(-1)=4$,
т.е. координаты точки касания (-1; 4). Угловой коэффициент k равен
$f'(x_0)=(3x^2-x)'\big|_{x=-1}=(6x-1)\big|_{x=-1}=6(-1)-1=-7$.

Составим уравнение касательной по формуле $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
$y=4+(-7)(x+1)=-7x-3$, т.е уравнение касательной

$$y=-7x-3.$$ ▲

Пример №4. Точка движется прямолинейно по закону $S=2t^3+t^2-4$. Найдите величину скорости в момент времени $t_0=4$с.

△ Скорость движения точки в любой момент времени t:

$$v=s'(t) = (2t^3+t^2-4)'=6t^2+2t.$$

Тогда скорость движения точки в момент времени t_0=4с:

$$v(t_0)=6\cdot 4^2+2\cdot 4=104 \text{ (м/с)}.. \blacktriangle$$

Задание и ход работы

1. Выполните задания по вариантам.
2. Ответьте на контрольные вопросы.

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

   а) $f(x)=x^7-3x^5+2\sin x-2$; б) $g(x)=(x+5)\sqrt{x}$; в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; г) $y=\arccos\sqrt{x}$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+2t^2+5t$. Найдите скорость в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 2

1. Найдите производную функции:

   а) $f(x)=4^x+2x^5+5\cos x-1$; б) $g(x)=x^3(1+x)$; в) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{4+2x}$; г) y=arctg(2x).

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=0$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=t^3-4t^2$. Найдите скорость в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 3

1. Найдите производную функции:

   а) $y=\dfrac{1}{x}-6x+x^{10}$; б) $y=(\dfrac{1}{x}+1)(2x-3)$; в) $\varphi(x)=\dfrac{2x}{1-x}$; г) $y=\ln(arctgx)$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+1$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=\dfrac{1}{4}t^4+t^2$. Найдите скорость в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 4

1. Найдите производную функции:

   а)$f(x)=2\sqrt{x}-4x^2+\dfrac{1}{x}+5$; б)$f(x) = (3x^2-2)(2+3x^2)$; в)$g(x)=\dfrac{5-2x^2}{1-x^3}$; г) y=arcsin(lnx).

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 - 2t$. Найдите скорость в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 5

1. Найдите производную функции:

   а) f(x)=$\frac{1}{x}$+4ctgx-x^3; б) y=(x^2+3)(x^4-1); в) f(x)=$\frac{x^2+15}{x+1}$; г) y=arcsinx^3.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = tgx$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 8$. Найдите скорость в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 6

1. Найдите производную функции:

   а) y=$\frac{1}{3}$ x^3+x^2-6tgx; б) y=(x^2-3x+9)(x+3); в) f(x)=$\frac{2x+7}{x^2-4}$; г) y=arctg(x^2).
2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 + \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 + 2t$. Найти скорость в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 7

1. Найдите производную функции:

   а) f(x)=$\sqrt{x} - 9x^2$-3; б) f(x)=(x^2+3)(x^6-1); в) φ(x)=$\frac{6x}{x+1}$; г)y=arcsin(3x-1).
2. Составьте уравнение касательной к кривой y=4-x^2 в точке с абсциссой x=1
3. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s = 4t^4 + 2$, где s – путь пройденный телом, t – время. Найти скорость тела в момент времени t = 2.

Вариант 8

1. Найдите производную функции:

   а) f(x)=6$\sqrt{x} + \frac{3}{x}$-x^2; б) y=(2x-4)$\sqrt{x}$; в) f(x)=$\frac{x^2-12}{x-2}$; г) y=arccos$\sqrt{x}$.

2. Составьте уравнение касательной к кривой y=x^3+2x в точке с абсциссой x=1

3. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s = t^5 + 2t + 3$, где s – путь пройденный телом, t – время. Найти скорость тела в момент времени t = 1.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Запишите определение производной функции.
3. Как найти мгновенную скорость прямолинейного неравномерного движения?
4. Сформулируйте геометрический и физический смысл производной.
5. Как называется операция вычисления производной.
6. Запишите правила нахождения производной.
7. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке?
8. Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
9. Как вычислить частное значение производной?
10. Запишите формулы производных обратных тригонометрических функций.

4.4 Практическая работа 4 Решение задач на нахождение второй производной

Цель работы: научиться находить производные второго порядка, применять производные в решении прикладных задач.

Пояснения к работе

Производные высших порядков.

Производной n-го порядка называется производная от производной *(n-1)*-го порядка.

Обозначение производных: f''- *второго* порядка (или *вторая производная*), f'''- *третьего* порядка (или *третья производная*).

Для обозначения производных более высокого порядка используются арабские цифры в скобках или римские цифры, например, $f^{(4)}(x)$, …, $f^{(n)}(x)$ или f^{IV} и т.д.

Пример №1. Найдите производную 3-го порядка функции $f(x)=5x^4–3x^3+2x–2$ в точке $x=2$.

△Находим вначале первую производную:

$$f'(x) = 20x^3 – 9x^2 +2,$$

затем вторую от первой производной: $(f'(x))' = f''(x)=(20x^3 – 9x^2 +2)'=60x^2 – 18x$.

Третья производная $f'''(x)=(f''(x))'=(60x^2-18x)'=60\cdot 2x-18=120x-18$.

Вычислим значение 3-й производной в точке $x=2$: $f'''(2)=120\cdot 2 – 18=240 -18=222$. ▲

Механическое значение второй производной. В физике вторая производная от пути s по времени t равна ускорению *a* в данный момент времени:

$$a(t)=s''(t)$$

Пример №2. Точка движется прямолинейно по закону $S=2t^3+t^2-4$. Найдите величину ускорения в момент времени t_0=4с.

△ Скорость движения точки в любой момент времени t:

$$v=s'(t) = (2t^3+t^2-4)'=6t^2+2t.$$

Ускорение движения точки в любой момент времени *t*:

$$a = s''(t)= (6t^2+2t)' = 12t+2.$$

Тогда ускорение движения точки в момент времени t_0=4с:

$$a (t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \text{ (м/с}^2\text{)}. ▲$$

Задание и ход работы

1. Выполните задания по вариантам.
2. Ответьте на контрольные вопросы.

Вариант 1

1. Вычислите производную 2-го порядка функции f(x)=3lnx-7x^3 в точке x=1
2. Найдите производную третьего порядка функции $y = 3x^4 + \cos 5x$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Найдите ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 2

1. Вычислите производную 2-го порядка функции f(x)= $\frac{1}{4}$ xe^x в точке x=2
2. Найдите производную третьего порядка функции $y = 2x^5 - \sin 3x$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найдите ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 3

1. Вычислите производную 2-го порядка функции g(x)=5sinx-7x^2 в точке x=0.
2. Найдите производную третьего порядка функции $y = 4x^3 - e^{5x}$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2$. Найдите ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 4

1. Вычислите производную 2-го порядка функции g(x)= $\frac{4}{x}$ -6x в точке x=2
2. Найдите производную третьего порядка функции $y = 5x^4 - \cos 4x$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 - 2t$. Найдите ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 5

1. Вычислите производную 2-го порядка функции f(x)=2tgx в точке x=0.
2. Найдите производную третьего порядка функции $y = 4x^4 + \sin 2x$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 8$. Найдите ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 6

1. Вычислите производную 2-го порядка функции g(x)=5e^{x}cosx в точке x=0
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 6x^5 + e^{4x}$.
3. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 + 2t$. Найдите ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 7

1. Вычислите производную 2-го порядка функции $f(x)=5\ln x+8x^5$ в точке x=1
2. Вычислите производную 3-го порядка функции $f(x)=4x^3+2x^2-1$ в точке x=0.
3. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s=4t^4+2$, где s – путь пройденный телом, t – время. Найдите ускорение тела в момент времени t = 2.

Вариант 8

2. Вычислите производную 2-го порядка функции $g(x)=-2\sin x+5x^6$ в точке x=0

2. Вычислите производную 3-го порядка функции $f(x)= 5x^3+5x^2+4$ в точке x=-1.

3. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s=t^5+2t+3$, где s – путь пройденный телом, t – время. Найдите и ускорение тела в момент времени t = 1.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной n-го порядка
2. Какую функцию называют сложной? Приведите примеры сложных функций.
3. Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.
4. Приведите примеры вычисления производных сложных функций, включающих функции натуральных и десятичных логарифмов.
5. Приведите примеры вычисления производных сложных функций, включающих в себя показательные функции.

4.5. Практическая работа 5. Нахождение неопределенного интеграла

Цель работы: научиться вычислять неопределенные интегралы элементарных функций.

Пояснения к работе

Неопределенный интеграл

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)*, если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Совокупность *F(x)+C* всех первообразных для функции *f(x)* называется *неопределенным интегралом от этой функции* и обозначается:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
3. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
4. $\int d(f(x)) = f(x) + C$;
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
6. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

Основные формулы интегрирования

1) $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C,\ \mu \neq -1$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3) $\int \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x} + C$;

4) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C$;

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

6) $\int e^x dx = e^x + C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

Дополнительные формулы интегрирования:

11) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$;

12) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$;

15) $\int \sqrt{x^2 + A}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C$;

16) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$;

17) $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\int\frac{d(a^2 \pm x^2)}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$;

18) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$;

19) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Непосредственное интегрирование

Пример 1. Вычислить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием:
а) $\int (4x^5 - 8^x)dx$; б) $\int\left(\frac{7}{1+x^2} + 12^x\right)dx$; в) $\int (3x^5 - \frac{5}{x} + 7\cos x + \sqrt[6]{x^5})dx$.

Решение: а) Под знаком интеграла заданы две функции: степенная $4x^5$ (формула 2 при n=5) и показательная 8^x (формула 6 при a=8):

$$\int (4x^5 - 8^x)dx = \int 4x^5dx - \int 8^x dx = 4\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1} - \frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{2}{3}x^6 - \frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

б) Под знаком интеграла заданы функции: дробно-рациональная $\frac{7}{1+x^2}$ (формула 13 при a=1) и показательная 12^x (формула 8 при a=12):

$$\int\left(\frac{7}{1+x^2} + 12^x\right)dx = \int\frac{7}{1+x^2}dx + \int 12^x dx = 7arctgx + \frac{12^x}{\ln 12} + C.$$

в) Подынтегральное выражение состоит из 4-х функций: степенная $3x^5$ (формула 2 при n=5), дробно-рациональная $\frac{5}{x}$ (формула 3), тригонометрическая 7cosx (формула 6) и иррациональная $\sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$ (формула 2 при n=$\frac{5}{6}$)

$$\int (3x^5 - \frac{5}{x} + 7\cos x + \sqrt[6]{x^5})dx = \int 3x^5 dx - \int \frac{5}{x}dx + \int 7\cos x dx + \int x^{\frac{5}{6}}dx = 3\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1} - 5\cdot\ln x + 7(-\sin x) +$$

$$+\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + C = 3\cdot\frac{x^6}{6} - 5\ln x - 7\sin x + \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{1}{2}x^6 - 5\ln x - 7\sin x + \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + C.$$

Метод замены переменной

Теорема. Пусть функция $x = u(t)$ непрерывно дифференцируема в некоторой области и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $t = u^{-1}(x)$. Тогда $\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt,$ где $t = u^{-1}(x)$.

Заметим, что требования к обратной функции нужны, чтобы суметь возвратиться обратно, от переменной t к переменной x.

Пример 2 . Вычислить неопределённый интеграл методом замены переменной:

$$\triangle \quad a)\int \sqrt[4]{3x-7}dx = \left|\begin{array}{ll} \textit{Замена}: & 3x-7=t \\ (3x-7)'dx = t'dt & \\ 3dx = dt & \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \int \sqrt[4]{t}\,\frac{1}{3}\mathrm{dt} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\mathrm{dt} = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C$$

=

$$= \frac{4}{15}(3x-7)^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}\sqrt[4]{(3x-7)^5} + C.$$

$$б)\int \frac{dx}{8x-3} = \left|\begin{array}{c} 8x-3=t \\ (8x-3)'dx = t'dt \\ 8dx = dt \\ dx = \frac{1}{8}dt \end{array}\right| = \int \frac{\frac{1}{8}dt}{t} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C = \frac{1}{8}\ln|8x-3| + C.$$

$$в)\int (4x+3)^5 dx = \left|\begin{array}{l} 4x+3=t \\ (4x+3)'dx = t'dt \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{1}{4}dt \end{array}\right| = \int t^5 \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{24}t^6 + C = \frac{1}{24}(4x+3)^6 + C.$$

▲

Метод интегрирования по частям

Пусть u=u(x) и v=v(x) – дифференцируемые функции. Тогда формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла записывается так:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du,$$

если интегралы в обеих частях соотношения существуют.

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v\,du$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл.

Пример 3. Вычислить неопределённый интеграл интегрированием по частям:

а) $\int x\ln x\,dx$; б) $\int x\cos x\,dx$; в) $\int 3x\cdot 7^x\,dx$.

Решение:

$$а)\int x\ln x\,dx = \left|\begin{array}{c} u=\ln x, \quad dv = x\,dx \\ du = u'dx = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \\ v=\int dv = \int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C;$$

$$б)\ \int x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{c} u=x, \quad dv=\cos x\,dx \\ du = u'dx = x'dx = dx \\ v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array}\right| = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C;$$

$$в)\int 3x\cdot 7^x\,dx = \left|\begin{array}{c} u=3x \quad dv = 7^x dx \\ du = u'dx = (3x)'dx = 3dx \\ v=\int dv = \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} \end{array}\right| = 3x\cdot\frac{7^x}{\ln 7} - \int \frac{7^x}{\ln 7}\cdot 3dx = 3x\cdot\frac{7^x}{\ln 7} - \frac{3}{\ln 7}\int 7^x dx = 3x\cdot\frac{7^x}{\ln 7} -$$

$$-\frac{3}{\ln 7}\frac{7^x}{\ln 7} + C = 3\frac{7^x}{\ln 7}\left(x - \frac{1}{\ln 7}\right) + C.$$

Задание и ход работы

1. Вычислите неопределённые интегралы по вариантам.
2. Ответьте на контрольные вопросы.

Вариант 1

1) непосредственным интегрированием $\int\left(x^4 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)dx$;

2) методом замены переменной $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x\cdot 3^x dx$.

Вариант 2

1) непосредственным интегрированием $\int\left(\frac{3}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 3x\sqrt{x}\right)dx$;

2) методом замены переменной $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x\ln x dx$.

Вариант 3

1) непосредственным интегрированием $\int \left(2x^2+3^x+4e^x\right)dx$;

2) методом замены переменной $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x\cdot 2^x dx$.

Вариант 4.

1) непосредственным интегрированием $\int \left(7x^6-12x^{11}+5x-6\sqrt{x}\right)dx$;

2) методом замены переменной $\int x(x^2+1)^9 dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int 2x^2\ln x dx$.

5 вариант

1) непосредственным интегрированием $\int \left(x^2+x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$;

2) методом замены переменной $\int \frac{dx}{(2+x)^4}$;

3) методом интегрирования по частям $\int x\sin x dx$.

6 вариант

1) непосредственным интегрированием $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}-\cos x\right)dx$;

2) методом замены переменной $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x^6\ln x dx$.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для данной функции *f(x)*?
3. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции *f(x)*?
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Какой геометрический образ соответствует неопределенному интегралу $\int f(x)dx$?
6. Как проверяется результат интегрирования?

4.6 Практическая работа 6. Нахождение определенного интеграла

Цель работы: научиться вычислять определенные интегралы элементарных функций различными методами.

Пояснения к работе

Определенный интеграл. Методы вычисления

В математическом анализе, когда функция задана аналитически (в виде формулы) и интеграл удается свести к табличному, то определенный интеграл вычисляется с помощью таблиц неопределенных интегралов и формулы Ньютона-Лейбница, например:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где [a; b] –отрезок интегрирования, a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования, f(x) - подынтегральная функция, f(x)dx – подынтегральное выражение, F(x) - первообразная, т.е. F′(x)=f(x).

Свойства определённого интеграла

1°. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int \lambda\, f(x)dx = \lambda \int f(x)dx ,$$

где λ - некоторое число.

2°. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

3°. *Если поменять местами пределы интегрирования, интеграл поменяет знак:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

4°. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всём отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей*, т.е. при любых *a, b, c*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5°. Если пределы интегрирования совпадают, то определенный интеграл равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

Пример №1. Найдите определенный интеграл, используя его свойства:

а) $\int_{-1}^{-1}\left(2x + 4\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int_{-2}^{0}\frac{xdx}{2} + \int_{0}^{1}\frac{xdx}{2}$; в) $\int_{1}^{3}\left(1-3x^2\right)dx - \int_{3}^{1}\left(1-3x^2\right)dx$; г) $\int_{-2}^{5}\left(\sqrt{x}-2\right)dx - \int_{-2}^{5}\left(\sqrt{t}-2\right)dt$.

△ а) $\int_{-1}^{-1}\left(2x + 4\sqrt{x}\right)dx$=0, так как пределы интегрирования равны.

б) Так как верхний предел первого интеграла совпадает с нижним пределом второго интеграла и -2 <0<1 то по свойству 2^0 имеем

$$\int_{-2}^{0}\frac{xdx}{2}+\int_{0}^{1}\frac{xdx}{2}=\int_{-2}^{1}\frac{xdx}{2}=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}=\frac{1^2}{4}-\frac{(-2)^2}{4}=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}.$$

в) В силу равенств подынтегральных функций, поменяв местами пределы интегрирования второго интеграла, имеем

$$\int_{1}^{3}(1-3x^2)dx-\int_{3}^{1}(1-3x^2)dx=\int_{1}^{3}(1-3x^2)dx+\int_{1}^{3}(1-3x^2)dx=2\int_{1}^{3}(1-3x^2)dx=2(x-\frac{3x^3}{3})\Big|_{1}^{3}=$$

$$=2(3-27)-2(1-1)=-48.$$

г) $\int_{-2}^{5}(\sqrt{x}-2)dx-\int_{-2}^{5}(\sqrt{t}-2)dt=0$, так как значение интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования. ▲

Пример №2. Вычислите определённый интеграл $\int_{0}^{1}(3x^2-\frac{5}{2\sqrt{x}}+7\cos x+\sqrt[6]{x^5})dx$

$$\triangle\ \int_{0}^{1}(3x^2-\frac{5}{2\sqrt{x}}+7\cos x+\sqrt[6]{x^5})dx=\left(3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-5\cdot\sqrt{x}+7(-\sin x)+\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1}\right)\Bigg|_{0}^{1}=(3\cdot\frac{x^3}{3}-5\sqrt{x}-$$

$$-7\sin x+\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}})\Big|_{0}^{1}=(x^3-5\sqrt{x}-7\sin x+\frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}})\Big|_{0}^{1}=1^3-5\sqrt{1}-7\sin 1+\frac{6}{11}\sqrt[6]{1^{11}}-(0^3-5\sqrt{0}-$$

$$-7\sin 0+\frac{6}{11}\sqrt[6]{0^{11}})=1-5-7\sin 1+\frac{6}{11}-0=-3\frac{5}{11}-7\sin 1.\ ▲$$

Метод замены переменной

Пусть 1) $x=\phi(t),\ \phi'(t)$ непрерывны при $t\in[\alpha,\beta]$,

2) значения $x=\phi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ не выходят за границы $[a,b]$,

3) $\phi(\alpha)=a,\ \phi(\beta)=b$,

Тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$

Пример №3. Найдите значение интеграла: а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}6\cos 2xdx$; б) $\int_{1}^{3}\sqrt[5]{(3x-2)^3}dx$.

Указание: Если функция имеет сложный аргумент в виде линейной функции одной переменной f(kx+b), то воспользуйтесь следующим правилом:

$$\int_{a}^{b}f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)\Big|_{a}^{b}.$$

$$\triangle\ \text{а)}\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}6\cos 2xdx=6\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=3\sin\frac{2\pi}{2}-3\sin\frac{2\pi}{4}=3\sin\pi-3\sin\frac{\pi}{2}=0-3=-3$$

б) $\int_1^3 \sqrt[5]{(3x-2)^3}dx = \int_1^3 (3x-2)^{\frac{3}{5}}dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-2)^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}(7^{\frac{8}{5}} - 1^{\frac{8}{5}}) = \frac{5}{24}(\sqrt[5]{7^8} - 1)$.▲

Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du,$$

где $uv|_b^a = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Пример 4. Вычислить определённый интеграл методом интегрирования по частям:

а) $\int_1^2 5x^3 \ln x dx$; б) $\int_0^{2\pi} 2x\cos x dx$; в) $\int_0^1 x\cdot e^{6x}dx$.

$$\Delta \quad a) \int_1^2 5x^3 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Пусть} \quad u = \ln x, \quad dv = 5x^3 dx \\ \text{Тогда} \quad du = u'dx = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int 5x^3 dx = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{5}{4}x^4 \end{array} \right| = \left(\ln x \cdot \frac{5}{4}x^4\right)\Big|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 \frac{5}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{5}{4}\ln 2\cdot 2^4 - \frac{5}{4}\ln 1\cdot 1^4 - \frac{5}{4}\int_1^2 x^3 dx = \frac{5}{4}\cdot 16\ln 2 - 0 - \frac{5}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 =$$

$$= 20\ln 2 - \frac{5}{16}(2^4 - 2^1) = 20\ln 2 - \frac{35}{8}.$$

$$б) \quad \int_0^{2\pi} 2x\cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Пусть} \quad u = 2x, \quad dv = \cos x\, dx \\ \text{Тогда} \quad du = u'dx = (2x)'dx = 2dx \\ v = \int dv = \int \cos x\, dx = \sin x \end{array} \right| = 2x\sin x|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x\, dx$$

$$= 4\pi \sin 2\pi - 0 - 2\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0 - 2\cdot 0 = 0.$$

$$в) \quad \int_0^1 x\cdot e^{6x}dx = \left| \begin{array}{l} \text{Пусть} \quad u = x, \quad dv = e^{6x}dx \\ \text{тогда} \quad du = u'dx = x'dx = dx \\ v = \int dv = \int e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x} \end{array} \right| = x\frac{1}{6}e^{6x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{6}e^{6x}dx =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{6}e^6 - 0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}e^{6x}|_0^1 = \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{36}(e^6 - e^0) = \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{36}e^6 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}(5e^6 + 1).$$ ▲

Задание и ход работы

1. Выполните задания по вариантам
2. Ответьте на контрольные вопросы

Вариант 1

Вычислите определённый интеграл

1. $\int_{-1}^{2}(2x^3 + x)dx$; 2. $\int_1^4\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$; 3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x - \cos x)dx$; 4. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int_{2}^{3}(2x-1)^3\,dx$ заменой переменной; 6. $\int_{1}^{2}\ln x dx$ интегрированием по частям

Вариант 2

Вычислите определённый интеграл

1. $\int_{-2}^{1}(5x^4-2x)dx$; 2. $\int_{1/4}^{1}\left(\frac{1}{x^3}-\sqrt{x}\right)dx$; 3. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx$; 4. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{9+x^2}$;

5. $\int_{1}^{2}\frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$ заменой переменной; 6. $\int_{1}^{2}x^3\ln x dx$ интегрированием по частям.

Вариант 3

Вычислите определённый интеграл

1. $\int_{1}^{3}(3x^2-5x^4-1)dx$; 2. $\int_{8}^{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x}\right)dx$; 3. $\int_{0}^{3}\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2}}$; 4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4dx}{\cos^2 x}$;

5. $\int_{1}^{5}\sqrt{(2zx-1)^3}\,dx$ заменой переменной; 6. $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$ интегрированием по частям.

Вариант 4

Вычислите определённый интеграл

1. $\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2+1)dx$; 2. $\int_{1/2}^{1}\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right)dx$; 3. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x)dx$; 4. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

5. $\int_{0}^{2}5\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx$ заменой переменной; 6. $\int_{0}^{1}x\cdot arctgxdx$ интегрированием по частям.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Что называется определенным интегралом от функции *f(x)* на отрезке [a, b]?
2. Что в записи $\int_{a}^{b}f(x)dx$ означают: а) числа a и b; б) x; в) f(x); г) f(x)dx. Может ли быть a=b, a>b?
3. Сформулируйте основные свойства определённого интеграла.
4. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
5. В чем различия понятий определенного и неопределенного интегралов?
6. Выпишите формулу Ньютона — Лейбница и объясните ее смысл.

4.7 Практическая работа 7 Выполнение операций над матрицами, вычисление определителя матрицы

Цель работы: научиться выполнять операции над матрицами, вычислять определители матриц.

Пояснения к работе

<u>Определение матрицы</u>

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размерности* $m \times n$. Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент. В дальнейшем будем обозначать матрицы большими буквами латинского алфавита: A, B и т.д.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число n ее строк (равное числу столбцов) – *порядком* квадратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы называется *главной диагональю*, а диагональ $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побочной диагональю*.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Побочная диагональ *Главная диагональ*

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, которые находятся ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. треугольная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрицу A называют *верхнетреугольной*, а матрицу B – *нижнетреугольной*.

Квадратная матрица называется *диагональной,* если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Среди квадратных матриц одного и того же порядка (например, порядка n, т.е. размеров $n\times n$) важную роль играет матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

которую называют *единичной* матрицей.

Например, E=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица 3-го порядка.

Матрица называется *матрицей - строкой*, если m=1.

Матрица называется *матрицей - столбцом*, если n=1.

Например, (1 0 3 5 -1) – матрица-строка, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец.

Линейные операции над матрицами. Операция транспонирования

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица $C=(c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для любых индексов i, j.

Для того *чтобы умножить матрицу $A=(a_{ij})$ на число λ*, нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число: $\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})$.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.

Основные свойства операций сложения и умножения скаляра на матрицу

1. $A+B=B+A$ – коммутативность сложения матриц.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – ассоциативность сложения матриц.
3. $A+(-A)=(-A)+A=O$ – наличие противоположной для произвольной матрицы (O - нуль-матрица).
4. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$ – дистрибутивность сложения матриц относительно умножения скаляра на матрицу.
5. $1\cdot A=A$.
6. $0\cdot A=O$.

Основные свойства операции транспонирования

1) $(A+B)'=A'+B'$.
2) $(\alpha\cdot A)'=\alpha\cdot A'$.

3) $(A')'=A$.

4) $E'=E$, где E – единичная матрица.

Пример 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Выполните следующие действия: $2(3A-B)'$.

△ Выполняем поочерёдно указанные действия:

$$3A=\begin{pmatrix} 3\cdot(-4) & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 6 & 15 \\ 6 & 3 & -6 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3A-B=\begin{pmatrix} -12 & 6 & 15 \\ 6 & 3 & -6 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 2 & 19 \\ 7 & 2 & -8 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3A-B)'=\begin{pmatrix} -14 & 2 & 19 \\ 7 & 2 & -8 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -14 & 7 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 19 & -8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2(3A-B)'=2\cdot\begin{pmatrix} -14 & 7 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 19 & -8 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -28 & 14 & -12 \\ 4 & 4 & -4 \\ 38 & -16 & 4 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Произведение матриц

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица порядка $m\times k$ вида $A\cdot B$.

Если $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ и $C=AB=(c_{ij})$, то элементы c_{ij} определяются следующим образом:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj},$$

где $i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,k$.

Замечание: Произведение двух квадратных матриц одинакового порядка не обладает, вообще говоря, перестановочным свойством: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Пример 2. Найти произведение матриц

$$\Delta\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 1+(-4)\cdot 2 & 1\cdot 4+0\cdot 2+(-4)\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 5+(-4)\cdot 1 \\ 2\cdot 3+3\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 4+3\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 0+3\cdot 5+1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

▲

<u>Возведение в степень</u>

Целой положительной степенью A^m (m>1) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m}$$

Основные свойства операции возведения в степень матриц

1. $A^0 = E$; 2. $A^1 = A$; 3. $A^m A^k = A^{m+k}$; 4. $(A^m)^k = A^{mk}$.

Пример 3. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ найдите A^3.

$$\triangle\ A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & -1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 + 9\cdot(-1) & -2\cdot 3 + 9\cdot 2 \\ -3\cdot 1 + 1\cdot(-1) & -3\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

<u>Определители квадратных матриц</u>

Определитель – число, характеризующее квадратную матрицу.

Определителем матрицы 1-го порядка $A=(a_{11})$ или *определителем первого порядка* называется элемент a_{11}: $|A| = a_{11}$.

Например, для матрицы A=(-5) определитель $|A| = |-5| = -5$.

Определителем второго порядка называется число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Например, определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - (-2)\cdot 4 = 18 + 8 = 26$

Числа, составляющие определитель, называются *элементами определителя*. Определитель второго порядка имеет две строки и два столбца.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое равенством

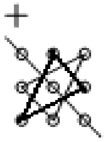
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Последнюю формулу, несмотря на внешнюю сложность записи, нетрудно запомнить. Если соединить линией каждые три элемента определителя, произведение которых входит в правую часть последней формулы со знаком «+», то получим легко запоминающуюся *схему 1*. Аналогично для произведений, входящих со знаком «–», имеем *схему 2*.

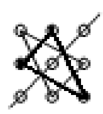
Схема 1 *Схема 2*

Это правило вычисления определителей 3-го порядка называется *правилом треугольников.*

$+$



$-$



Пример 4. Вычислить определитель матрицы А=$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

△ $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1\cdot(-2)\cdot 6 + 4\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 5 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 0\cdot 6 = 95\cdot$ ▲

Задание и ход работы

1. Выполните задания по вариантам
2. Ответьте на контрольные вопросы

1 вариант

1. Даны матрицы А=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и С=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

   Найдите: а) А+В; б) (А+В)′; в) (А+В)′·С; г) 2(А+В)′·С-Е,
   где Е – единичная матрица 3 – го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

2 вариант

1. Даны матрицы А=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и С=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Найдите: а) 2А-В; б) (2А-В)′; в) (2А-В)′·С; г) (2А-В)′·С+Е,
   где Е – единичная матрица 3 – го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

3 вариант

1. Даны матрицы А=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ и С=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   Найдите: а) А+2В; б) (А+2В)′; в) (А+2В)′·С; г) (А+2В)′·С-3Е,
   где Е – единичная матрица 3 – го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} 4 & -11 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

4 вариант

1. Даны матрицы А=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и С=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) A+3B; б) $(A+3B)'$; в) $C\cdot(A+3B)'$; г) $C\cdot(A+3B)'-E$,
где E – единичная матрица 3 – го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

5 вариант

1. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и C=$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) C-B; б) $(C-B)'$; в) $(C-B)'\cdot 3A$; г) $(C-B)'\cdot 3A-E$,
где E – единичная матрица 3-го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

6 вариант

1. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и C=$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) C-2A; б) $(C-2A)'$; в) $(C-2A)'\cdot B$; г) $(C-2A)'\cdot B-E$,
где E – единичная матрица 3 – го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

7 вариант

1. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ и C=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) B+3A; б) $(B+3A)'$; в) $(B+3A)'\cdot C$; г) $(B+3A)'\cdot C+3E$,
где E – единичная матрица 3 – го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

8 вариант

1. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и C=$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) A-B; б) $(A-B)'$; в) $(A-B)'\cdot C$; г) $3(A-B)'\cdot C-E$,
где E – единичная матрица 3 – го порядка.

2. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы

3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы размерности $m \times n$.
2. В каком месте матрицы $A = (a_{ij})$ расположен элемент a_{52}?
3. Какие матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ называются равными?
4. Может ли матрица состоять: а) из одной строки; б) из одного столбца; в) из одной строки и одного столбца?
5. Может ли какой-нибудь элемент a_{ii} диагональной матрицы быть равным нулю?
6. Можно ли найти сумму двух матриц, одна из которых имеет размер 3×4, а другая – размер 4×3?
7. Существует ли произведение матриц AB, если матрица A имеет размер 3×4, а матрица B – размер 4×2? Существует ли для этих матриц произведение BA?
8. Можно ли найти произведение двух матриц, одна из которых – квадратная, а другая не является квадратной?
9. Пусть для матриц A и B существуют произведения AB и BA. Можно ли утверждать, что матрицы AB и BA одного размера?
10. Может ли произведение двух ненулевых матриц быть нулевой матрицей?
11. При каких условиях определитель матрицы второго порядка равен нулю?
12. Чему равен определитель квадратной матрицы, если он содержит пропорциональные строки?
13. Определитель квадратной матрицы содержит столбец, все элементы которого равны нулю. Чему равен такой определитель?
14. Чему равен определитель квадратной матрицы, содержащий одинаковые строки?
15. Чему равен определитель треугольной матрицы?

4.8 Практическая работа 8 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Цель работы: научиться решать системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

Пояснения к работе

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

В общем случае число уравнений в системе не обязательно совпадает с числом неизвестных: m может быть меньше, равно или больше числа n.

Числа a_{ij} (вещественные или комплексные) называются *коэффициентами системы* (1.1); b_i – *свободными членами*; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – *неизвестными*.

Систему (*) можно записать в матричной форме:

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется *решением* системы (1.1), если после замены неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ соответственно каждое из уравнений системы превращается в верное равенство.

Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система, обладающая хотя бы одним решением, называется *совместной*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*. Система, имеющая множество решений, называется *неопределенной*.

<u>Правило Крамера</u>

Ограничимся сначала рассмотрением систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных (такие системы называют *квадратными*).

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \textbf{(**)}$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы* (**).

<u>Теорема</u>. *Если определитель Δ квадратной системы (**) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение. Это решение может быть найдено по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 1. Решить **методом Крамера** систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$\triangle$ Определитель системы вычислим по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot(-1) - 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot(-1)=2+2-1-1-1+4=5.$$

Определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получим из определителя Δ путём замены соответственно 1-го, 2-го и 3-го столбцов столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot2 + 11\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot1\cdot8 - 1\cdot1\cdot8 - 1\cdot1\cdot3 - (-1)\cdot11\cdot2=20;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot11\cdot2 + 2\cdot8\cdot1 + 3\cdot1\cdot1 - 1\cdot11\cdot1 - 1\cdot8\cdot1 - 3\cdot2\cdot2=10;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot8 + 2\cdot1\cdot3 + (-1)\cdot11\cdot1 - 3\cdot1\cdot1 - 11\cdot1\cdot1 - 2\cdot(-1)\cdot8=5;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: $X^T = (4\ \ 2\ \ 1)$. ▲

Задание и ход работы

Решите систему линейных уравнений по формулам Крамера по вариантам

1 вариант $\begin{cases} x + 3y + 2z = -5, \\ 2x - 2y + 3z = -8, \\ 3x + 4y - 4z = 5 \end{cases}$ 2 вариант $\begin{cases} x + 5y + z = -8, \\ 2x - 3y + 5z = 16, \\ 5x + 2y - z = -6 \end{cases}$ 3 вариант $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ 6x - 5y + 2z = -11, \\ 5x + 2y - 2z = -3. \end{cases}$

4 вариант $\begin{cases} x + 4y + 3z = 5, \\ 3x - 2y + 3z = 9, \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$ 5 вариант $\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ 3x + 2y + 3z = 6, \\ 2x - 2y - z = 7 \end{cases}$ 6 вариант $\begin{cases} x + 5y + z = 3, \\ 2x - 3y + 3z = 8, \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$

7 вариант $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - 2y + 3z = -1, \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$ 8 вариант $\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ 3x - 2y - z = 4 \end{cases}$ 9 вариант $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

10 вариант $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

4.9 Практическая работа 9 Преобразования систем линейных алгебраических уравнений.

Цель работы: научиться производить элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений, вычислять ранг матрицы системы.

Пояснения к работе

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются ее следующие преобразования:

1) перестановка любых двух уравнений местами;

2) умножение обеих частей одного уравнения на любое число $k \neq 0$;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число k;

(при этом все остальные уравнения остаются неизменными).

Нулевым уравнением называем уравнение следующего вида:

$$0 \times_1 + 0 \times_2 + \ldots + 0 \times_n = 0 .$$

Теорема *Любая конечная последовательность элементарных преобразований и преобразование вычеркивание нулевого уравнения переводит одну систему линейных уравнений в равносильную ей другую систему линейных уравнений.*

<u>Ранг матрицы</u>

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка (k×k). Определитель M_k этой матрицы называется *минором k-го порядка* матрицы А.

Очевидно, что матрица А обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n. Среди всех отличных от нуля миноров матрицы А найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим.

Рангом матрицы называется наивысший порядок миноров данной матрицы, отличных от нуля.

Обозначение: rang A или r(A).

Свойства ранга: 1) Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

2) r(A)≤min(m,n).

3) r(A)=n у матрицы n-го порядка тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.

Вычисление ранга матрицы путем элементарных преобразований.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы А и В эквивалентны, то это записывается так: А ~ В.

Пример 1. Найти ранг матрицы A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

△ Из второй строки вычтем первую и поменяем местами эти строки: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

Из третьей строки вычтем первую, получим матрицу B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, которая эквивалентна матрице A, так как получена из нее с помощью конечного множества элементарных преобразований. Очевидно, что ранг матрицы B равен 2 (две ненулевые строки), а следовательно, и r(A)=2. ▲

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Тогда расширенной матрицей будем называть матрицу:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. чтобы $r(A\,|\,b) = r(A)$.

Иначе, 1) r(A) ≠ r(A|b) ⇔ система несовместна,

2) r(A) = r(A|b) ⇔ система совместна,

3) r(A) = r(A|b) =n ⇔ система определённа,

4) r(A) = r(A|b)<n ⇔ система неопределённа.

Алгоритм исследования произвольной системы линейных уравнений на совместность.

1) расширенная матрица (A|b) приводится с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду (при этом одновременно приводится к ступенчатому виду и матрица A системы);

2) находятся числа r(A), r(A|b) и n (n – число неизвестных системы);

3) проводится исследование системы согласно теоремы Кронекера-Капелли.

Пример 2. Исследовать систему $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$ на совместность.

△ Расширенную матрицу системы $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ приведём к ступенчатому виду преобразованием строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ C_2 + C_1 \\ C_3 + C_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{6}C_2 \\ \frac{1}{2}C_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ C_3 - C_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A|b}.$$

Так как после преобразований в матрице А осталось 2 ненулевые строки, то ранг матрицы системы r(A)=2. Аналогично, ранг расширенной матрицы r(A|b)=2.

r(A) = r(A|b)<4 (4 – количество неизвестных системы). Следовательно, система совместна и неопределённа, т.е. имеет бесконечное множество решений. ▲

Задание и ход работы

1. Исследуйте заданную систему уравнений на совместность.
2. Ответьте на контрольные вопросы

1 вариант $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_4 = 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

2 вариант $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 3 \end{cases}$

3 вариант $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 - 7x_3 - 4_4 = 5 \end{cases}$

4 вариант $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 2 \end{cases}$

5 варианту $\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

6 вариант $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

7 вариант $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

8 вариант $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

9 вариант $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -12, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -9, \\ -2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -8. \end{cases}$

10 вариант $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 6. \end{cases}$

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1. Какие преобразования системы линейных алгебраических уравнений называются элементарными?

2. Пусть матрица A содержит минор пятого порядка, отличный от нуля. Что можно сказать о ранге матрицы A?

3. Может ли ранг матрицы А размера 7×3 равняться четырем?

4. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной?

5. Что называется общим решением системы линейных уравнений?

6. Может ли система, содержащая семь уравнений с пятью неизвестными, быть эквивалентной системе четырех уравнений с пятью неизвестными?

4.10 Практическая работа 10. Применение метода Гаусса к решению СЛАУ

Цель работы: научиться решать системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Пояснения к работе

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Для системы уравнений образуем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Посредством элементарных преобразований приведём расширенную матрицу к ступенчатому

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \dot a_{11} & \dot a_{12} & \dots & \dot a_{1r} & \dots & \dot a_{1n} & \dot b_1 \\ 0 & \dot a_{22} & \dots & \dot a_{2r} & \dots & \dot a_{2n} & \dot b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot a_{rr} & \dots & \dot a_{rn} & \dot b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dot b_{r+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Рассмотрим различные случаи:

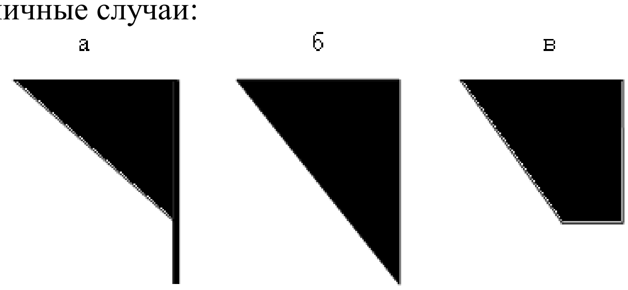


Рис.1.

1) $\dot b_{r+1} \neq 0$. Расширенная матрица в этом случае имеет вид флажка (рис 1. а). Тогда система уравнений несовместна, т.к. уравнений с номером r+1 содержит нулевые коэффициенты перед неизвестными, тогда как свободный член отличен от нуля.

Пусть далее $\dot b_{r+1} = 0$.

2) Число неизвестных ***n*** и число уравнений ***r*** **совпадают**. Расширенная матрица примет треугольный вид (рис 1., б). Система уравнений, соответствующая этой матрице, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{a}_{11}x_1 + \dot{a}_{12}x_2 + \cdots + \dot{a}_{1n}x_n = \dot{b}_1, \\ \qquad \dot{a}_{22}x_2 + \cdots + \dot{a}_{2n}x_n = \dot{b}_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad \dot{a}_{nn}x_n = \dot{b}_n. \end{cases}$$

Из последнего уравнения определяется неизвестная величина x_n. Подставив её в предыдущее уравнение с номером n-1, находим x_{n-1}. Продолжая этот процесс, находим неизвестные со всё меньшими номерами. Наконец, подставив найденные значения неизвестных x_2, x_3, …, x_n в первое уравнение, найдём величину x_1. Итак, при n=r система определена и имеет единственное решение.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ **методом Гаусса**.

△ Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к верхнетреугольному виду путём элементарных преобразований над строками (для краткости записи обозначим 1-ю, 2-ю и 3-ю строки соответственно C_1, C_2 и C_3):

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 + (-2)C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) C_2 - C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ C_3 - 2C_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

В ходе элементарных преобразований мы получили равносильную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ \quad x_2 - 2x_3 = 0, \\ \qquad 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим x_3=1.

Из второго уравнения выразим x_2=0+2x_3=2.

Из первого уравнения найдём x_1=3+x_2–x_3=3+2–1=4.

Ответ: (4; 2; 1). ▲

3) Число неизвестных **n больше** числа уравнений **r**. Вид расширенной матрицы – трапеция (рис.1.,в). Последнее уравнение содержит переменные x_r, x_{r+1}, …, x_n. Выразим в этом уравнении переменную x_r через остальные неизвестные и подставим в уравнение с номером r-1. Найдём переменную x_{r-1}, которая будет выражена через те же неизвестные x_{r+1}, …, x_n. Результат подставим в уравнение с номером r-2 и т.д. Таким образом, мы можем определить значения переменных x_r, x_{r-1}, …, x_1 через неизвестные x_{r+1}, x_{r+1},…, x_n :

$$\begin{cases} x_1 = \ddot{a}_{1,r+1}x_{r+1} + \ddot{a}_{1,r+2}x_{r+2} + \cdots + \ddot{a}_{1n}x_n + \ddot{b}_1, \\ x_2 = \ddot{a}_{2,r+1}x_{r+1} + \ddot{a}_{2,r+2}x_{r+2} + \cdots + \ddot{a}_{2n}x_n + \ddot{b}_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_r = \ddot{a}_{r,r+1}x_{r+1} + \ddot{a}_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + \ddot{a}_{rn}x_n + \ddot{b}_{r.} \end{cases}$$

Придавая неизвестным x_{r+1}, x_{r+2},…, x_n произвольные значения, получаем бесконечное множество решений системы уравнений.

Решение методом Гаусса представляет собой кропотливый и часто длительный процесс. Когда в конце пути может оказаться, что система не имеет решения, наступает разочарование. Столько сделано работы – и как ничтожен итог. В середине XIX в. Леопольдом Кронекером (1823-1891), профессором Берлинского университета, была найдена та «лакмусовая бумажка», по реакции которой можно судить о наличии решений системы линейных уравнений. Ею оказался *ранг*.

Алгоритм исследования произвольной системы линейных уравнений методом Гаусса.

1) расширенная матрица $(A|b)$ приводится с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду (при этом одновременно приводится к ступенчатому виду и матрица A системы);
2) находятся числа $r(A)$, $r(A|b)$ и n (n – число неизвестных системы);
3) проводится исследование системы согласно теореме Кронекера-Капелли.

Пример 2. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$

△ Исследуем систему на совместность. Для этого найдём ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы путём элементарных преобразований.

Расширенная матрица имеет вид:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 7 & 5 & -7 & -5 & 2 \\ 1 & 8 & -18 & -5 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 - 7C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 12 & -28 & -12 & -40 \\ 0 & 9 & -21 & -6 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 : 4 \\ C_3 : 3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ C_3 - C_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

В матрице системы (до вертикальной черты) после преобразований 1-й, 2-й и 4-й столбцы составляют определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, поэтому ранг матрицы системы $r(A)=3$ (т.к. порядок определителя равен 3). Расширенная матрица включает в себя все 5 столбцов матрицы. Т.к. количество ненулевых строк расширенной матрицы совпадает с количеством ненулевых строк матрицы системы, то её ранг равен рангу матрицы системы, т.е. $r(A|b)=3$.

Данная система совместна, т.к. $r(A|b)=r(A)=3$. Число неизвестных $n=4>3$, поэтому система имеет бесконечное множество решений.

Равносильная система приняла следующий вид: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -10, \\ x_4 = 6. \end{cases}$

$n-r=1$ неизвестная является свободной.

Из 3-го уравнения $x_4=6$.

Из 2-го уравнения примем за свободную переменную $x_3=C$ и выразим неизвестную $x_2=\frac{1}{3}(-10+7x_3+3x_4)=\frac{1}{3}(-10+7C+18)=\frac{1}{3}(7C-8)$.

Из 1-го уравнения найдём $x_1=6+x_2-3x_3-x_4=6+\frac{1}{3}(7C-8)-3C-6=-\frac{2}{3}C-\frac{8}{3}$.

Общее решение имеет вид: $\left(-\frac{2}{3}C-\frac{8}{3};\ \frac{7}{3}C-\frac{8}{3};\ C;\ 6\right)$.

Найдём одно частное решение при $C=1$: $\left(-\frac{10}{3};\ -\frac{1}{3};\ 1;\ 6\right)$. ▲

Задание и ход работы

1. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса.
2. Методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение СЛАУ.

<u>1 вариант</u> 1. $\begin{cases} x + 3y + 2z = -5, \\ 2x - 2y + 3z = -8, \\ 3x + 4y - 4z = 5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_4 = 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

2 вариант 1. $\begin{cases} x+5y+z=-8, \\ 2x-3y+5z=16, \\ 5x+2y-z=-6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+2x_2+3x_4=3 \end{cases}$

3 вариант 1. $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ 6x-5y+2z=-11, \\ 5x+2y-2z=-3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ 3x_1+11x_2-7x_3-4_4=5 \end{cases}$

4 вариант 1. $\begin{cases} x+4y+3z=5, \\ 3x-2y+3z=9, \\ 2x+4y-3z=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=-2, \\ x_1-x_2-x_4=2 \end{cases}$

5 варианту 1. $\begin{cases} x+2y+z=2, \\ 3x+2y+3z=6, \\ 2x-2y-z=7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1+9x_2-5x_3-8x_4=5, \\ 3x_1+7x_2-2x_3-4x_4=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3 \end{cases}$

6 вариант 1. $\begin{cases} x+5y+z=3, \\ 2x-3y+3z=8, \\ 2x+4y-z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+2x_4=18, \\ -x_1-x_2+2x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3-2x_4=1 \end{cases}$

7 вариант 1. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 3x-2y+3z=-1, \\ 2x+3y-2z=8 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$

8 вариант 1. $\begin{cases} x+3y-z=2 \\ 2x-3y+2z=0, \\ 3x-2y-z=4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1-7x_2+3x_3+7x_4=1, \\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$

9 вариант 1. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1, \\ x_1-2x_2+4x_3=3, \\ 3x_1-x_2+5x_3=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3+x_4=-12, \\ x_1+7x_2-5x_3+2x_4=-9, \\ -2x_1+5x_2-6x_3+3x_4=-8. \end{cases}$

10 вариант 1. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2, \\ x_1-2x_2+x_3=1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=2, \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-2, \\ 2x_1+x_2-4x_3+7x_4=6. \end{cases}$

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

Литература

Основные источники

1. Башмаков М.И. Математика: учебник: Рекомендовано ФГАУ «ФИРО». — 7-е изд., стер., - М., ОИЦ «Академия», 2020
2. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449006

Дополнительные источники

3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.- изд.: «Академия», 2009
4. Валуце И.И., Математика для техникумов.- изд.: наука,2010
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.- М.:Ком.Книга.2009
6. Подольский А.В. Сборник задач по математике.-Изд.: АСТ-Пресс Книга, 2008

Интернет-ресурсы:

7. Российский образовательный портал. – URL: http://edu.ru (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
8. Сайт ФГОУ Федеральный институт развития образования. – URL:
9. Государственная образовательная платформа «Российская электронная школа» – URL: https://resh.edu.ru/
10. Цифровой образовательный ресурс «Якласс» – URL: электронный.