

Министерство образования и науки Республики Марий Эл  
Государственное бюджетное профессиональное образовательное  
учреждение Республики Марий Эл  
«Йошкар-Олинский техникум сервисных технологий»

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине

ЕН.01 Математика

---

46.02.01 Документационное обеспечение управления и архивоведение

2021г.

РАССМОТРЕНО  
на заседании ПЦК Общеобразовательных  
дисциплин и дисциплин направления  
«Социальная работа»  
Председатель ПЦК В.Н. Петрова  
Протокол № 1 от «31» 08 2014 г.

УТВЕРЖДАЮ  
Зам. директора по УР  
Н.П. Житомирова /  
«31» 08 2014 г.

Составитель: Житомирова Н.П., преподаватель первой квалификационной  
категории ГБПОУ Республики Марий Эл  
«ЙОТСТ»

Рецензенты:

- 1) Николаева Е.А., преподаватель высшей квалификационной категории  
ГБПОУ Республики Марий Эл «ЙОТСТ»

### **Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы.**

Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной  
работы разработаны для студентов учреждений среднего профессионального  
образования. В них приведены: дорожная карта, методические указания по  
выполнению, задания для выполнения внеаудиторной самостоятельной работы,  
план отчета, литература.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Дорожная карта выполнения внеаудиторной самостоятельной работы	5
Внеаудиторная самостоятельная работа 1 Решение индивидуальных задач по вычислению пределов функций.	6
Внеаудиторная самостоятельная работа 2 Нахождение производной второго порядка и выше.	12
Внеаудиторная самостоятельная работа 3. Исследование функции с помощью производной	13
Внеаудиторная самостоятельная работа 4 Решение прикладных задач на применение определенного интеграла.	16
Внеаудиторная самостоятельная работа 5 Нахождение площадей фигур по индивидуальным заданиям.	19
Внеаудиторная самостоятельная работа 6 Подготовка сообщения по теме «Виды матриц»	23
Внеаудиторная самостоятельная работа 7. Нахождение определителя матрицы	24
Внеаудиторная самостоятельная работа 8. Применение метода Гаусса к решению систем линейных алгебраических уравнений	28
Рекомендуемая литература	30

## Введение

Одной из важнейших задач, стоящих перед профессиональной образовательной организацией, является повышение качества подготовки специалистов. Обучающийся профессиональной образовательной организации среднего профессионального образования должен не только получать знания по математике, овладевать навыками и умениями использования этих знаний, но и уметь самостоятельно приобретать необходимую для профессиональной деятельности информацию.

Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы (далее – ВСР) разработаны в соответствии с рабочей программой по учебной дисциплине ЕН.01 Математика.

Цель данных методических рекомендаций – помочь обучающимся в выполнении самостоятельной работы.

Выполнение самостоятельной работы предполагает изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы по каждой из изучаемых тем, использование других источников информации.

Самостоятельная работа - это метод обучения и самообразования, предпосылка дидактической связи различных методов между собой. В процессе самостоятельной работы студент выступает как активная творческая личность, готовая к будущей профессиональной деятельности. Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умения использовать справочную и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитию исследовательских умений;
- формирования общих компетенций.

В самостоятельной работе формируются следующие

- знания:

З1. Основные понятия и методы математического анализа;

З2. Основные численные методы решения прикладных задач;

- умения:

У1. Решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;

У2. Применять основные методы интегрирования при решении задач;

У3. Применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности;

- общие компетенции:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности

## 1. Дорожная карта выполнения внеаудиторной самостоятельной работы

	Наименование раздела, темы программы	Задания по ВСР	Кол-во часов	Форма отчета
1	Раздел 1. Элементы математического анализа Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции	Решение индивидуальных задач по вычислению пределов функций	3	Письменная работа
2	Тема 1.2 Дифференциальное исчисление	Нахождение производной второго порядка и выше	2	Письменная работа
3		Исследование функции с помощью производной	4	Письменная работа
4	Тема 1.3 Интегральное исчисление	Решение прикладных задач на применение определенного интеграла	3	Письменная работа
5		Нахождение площадей фигур по индивидуальным заданиям	3	Письменная работа
6	Раздел 2. Элементы линейной алгебры Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений	Подготовка сообщения по теме «Виды матриц»	3	Устное сообщение с презентацией
7		Нахождение определителя матрицы	3	Письменная работа
8		Применение метода Гаусса к решению систем линейных алгебраических уравнений	3	Письменная работа
	<b>Итого:</b>		<b>24</b>	

# Внеаудиторная самостоятельная работа №1

## Решение индивидуальных задач по вычислению пределов функций

Раздел 1. Элементы математического анализа

Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции

**Цель:**

- систематизация знаний по методам вычисления предела функции;
- отработка навыков вычисления пределов функции.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, У3, ОК 1, ОК 4, ОК 9

**Норма времени:** 3 часа

**Рекомендации по выполнению работы:**

- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий.

**Форма отчета:** Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

**Содержание отчета:**

1. Название ВСР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

**Задание:**

Выполните задания по индивидуальным вариантам.

Номер задания Номер варианта	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10
11	1	2	3	4	5	6
12	2	4	6	8	10	2
13	1	3	5	7	9	1
14	1	1	1	2	2	2
15	8	8	9	9	9	10
16	5	6	6	6	7	7
17	10	9	8	7	6	5
18	8	7	6	5	4	3
19	6	5	4	3	2	1

20	4	3	2	1	10	9
21	1	2	1	2	1	2
22	4	3	4	3	4	3
23	5	6	5	6	5	6
24	8	7	8	7	8	7
25	9	10	9	10	9	10

### Задание 1

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ . Задания взять из таблиц 1а и 1б.

Таблица 1а

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x - x^3}{3x - 2x^2 + x^4}$	6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4 + x^5}$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}$	7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^3 - 5}$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1}$	8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^3 + 3x^2}$
4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$	9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{3x^3 + 1}$
5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}$	10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^4 - x + 2}$

Таблица 1б

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$	6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 + 13x^2 - x + 10}{x^3 + 5x^2 + 13x - 12}$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{4\sqrt{x^3} + x - x}$	7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 - 6x^3 + 2}{8x^3 + 4x^2 + 2x^4 - 7}$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{3x^2 + 2x + 4}$	8	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n - 6} + 2}{n^3 + 8}$
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 6n^2}{2n - \sqrt[4]{8n^8} + 1}$	9	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 1}$
5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x}{x^3 - 3x^2 + 1}$	10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2 - 5x + 2}{x^3 + x^2 + 2x - 1}$

## Задание 2

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Задания

взять из таблицы 2

Таблица 2

№ nn	Задание	№ nn	Задание
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$	6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$	7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 15x^2}{x^3 + 5x^2}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{14x^2 - 5x}{x^3 + x^2 + 2x}$	8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 5x^3}{x^5 + 2x^4 - 10x^3}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 15x^5}{x^3 - 12x^2}$	9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^6 - 5x^7 + 3x^9}{x^4 + x^5 + 2x^6}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^7 - 5x^8 + 3x^9}{x^7 + x^8 + 2x^{10}}$	10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 - 4x^3}{x^3 + 5x^5}$

## Задание 3

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Задания

взять из таблицы 3

Таблица 3

№ nn	Задание	№ nn	Задание
1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$	6	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$
2	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}$	7	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}$
3	$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$	8	$\lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 8x + 4}$
4	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$	9	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9}$
5	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$	10	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$

## Задание 4

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ . Задания

взять из таблицы 4

Таблица 4

№ nn	Задание	№ nn	Задание
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$	6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$
2	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x+3} - 3}$	7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$
3	$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{4 - \sqrt{2x} - 2}$	8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$
4	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$	9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$	10	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$

### Задание 5

Вычислить предел функции, используя I замечательный предел и его вариации. Задания взять из таблицы 5.

Таблица 5

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$	6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}$	7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{x}$	8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}$	9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{x}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2}$	10	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

### Задание 6

Вычислить предел функции, используя II замечательный предел. Задания взять из таблицы 6.

Таблица 6

№nn	Задание	№nn	Задание
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^{2x}$	6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{15x}$

2	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{10}{x}}$	7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{10x}$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$	8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{2x}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$	9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^{2x}$
5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{x}\right)^{4x}$	10	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 8x)^{\frac{2}{x}}$

### Пример выполнения ВСР

**Задание №1** Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа

$$\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]:$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2}{5x^5 + 4x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^6 + x^4}{7x^5 - 5x^3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{6x^3 - 5}.$$

*Указания:* Разделить все слагаемые числителя и знаменателя на старшую степень, содержащуюся в дроби. При этом, если старшая степень расположена в числителе, предел равен  $\infty$ , если в знаменателе, то предел равен нулю; если старшая степень знаменателя равна старшей степени числителя, предел равен отношению коэффициентов при них.

$$\Delta \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2}{5x^5 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^5} + \frac{x^2}{x^5}}{\frac{5x^5}{x^5} + \frac{4x^2}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{4}{x^3}} = \frac{0+0}{5+0} = 0$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^6 + x^4}{7x^5 - 5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x^6}{x^6} + \frac{x^4}{x^6}}{\frac{7x^5}{x^6} - \frac{5x^3}{x^6}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{7}{x} - \frac{5}{x^3}} = \left\{ \frac{-1+0}{0-0} \right\} = \infty.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{6x^3 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3} - \frac{5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{6 - \frac{5}{x^3}} = \frac{1+0}{6-0} = \frac{1}{6}. \blacktriangle$$

### Задание 2

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .

$$\Delta \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(2x-2)}{x^2(5x-4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-2}{5x-4} = \frac{2 \cdot 0 - 2}{5 \cdot 0 - 4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \blacktriangle$$

### Задание 3

Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ , раскрыв неопределенность типа  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

Указания:

1. Выписать квадратный трёхчлен отдельно и приравнять его нулю:  $ax^2+bx+c=0$ .

2. Найти корни получившегося квадратного уравнения.

3. Разложить квадратный трёхчлен, стоящий под знаком предела, на множители по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \quad \text{где } x_1 \text{ и } x_2 \text{ — корни уравнения.}$$

4. Сократить один из множителей.

5. Вычислить предел.

$\Delta$  Знаменатель функции, стоящей под знаком предела, представляет из себя квадратный трёхчлен. Разложим его на множители, решив квадратное уравнение:

$$x^2-3x+2=0; \quad D=(-3)^2+4 \cdot 1 \cdot (-2)=9-8=1; \quad x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2}=1; \quad x_2=\frac{3+\sqrt{1}}{2}=2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = -1. \blacktriangle$$

### Задание 4

Вычислить предел функции  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$ , раскрыв неопределенность типа  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .

$\Delta$  Умножим числитель и знаменатель на сумму корней  $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$ , чтобы применить формулу сокращённого умножения  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x})^2 - (\sqrt{2-x})^2}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \frac{2}{5(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0})} = \\ &= \frac{1}{5\sqrt{2}}. \blacktriangle \end{aligned}$$

### Задание 5

Вычислить предел функции  $\frac{2\sin 5x}{8x}$  при  $x \rightarrow 0$ , используя I замечательный предел и его вариации.

Указание: предел вида  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$  преобразуют так, чтобы использовать 1-й замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a \cdot 1 = a$ .

$$\Delta \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 5x}{8x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{8x} = \frac{2}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{1}{4} \cdot 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{5}{4} = 1,25 \blacktriangle$$

### Задание 6

Вычислить предел функции, используя II замечательный предел.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^x; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{8}{x}}$$

Указание: В пределах вида  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^x$  сделать замену  $\frac{a}{bx} = \frac{1}{y}$ , откуда  $x = \frac{a}{b} y$ .

$$\Delta \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{3}y} = \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{5}{3}} = e^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{e^5}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{8}{x}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{3 \cdot 8} = e^{24}. \blacktriangle$$

## Внеаудиторная самостоятельная работа №2 Нахождение производной второго порядка и выше

Тема 1.2 Дифференциальное исчисление

**Цель:** совершенствование навыков нахождения производной второго порядка и выше.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: 31, 32, У1, ОК 5, ОК 9

**Норма времени:** 2 часа

**Рекомендации по выполнению работы:**

- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте правила и формулы вычисления производных элементарных и сложных функций.

**Форма отчета:** Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

**Содержание отчета:**

1. Название ВСР
2. Цель работы
3. Исходные данные заданий
4. Необходимые вычисления

**Задания:**

1. Вычислите производную 2-го порядка функции:

а)  $y = x^5 - 3x^4 - x^3 - 5x^2 + x - 1$  в точке  $x=0$ ;

б)  $y = e^{\cos x}$ ;    в)  $y = \sin 2x$ ;    г)  $y = x \ln x$ ;    д)  $y = e^x + x^2$ .

2. Вычислите производную 3-го порядка функции:

а)  $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 3x + 7$  в точке  $x = -1$ ;    б)  $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ;    в)  $y = \cos 3x$

3. Дано уравнение прямолинейного движения тела  $s = t^4 - 3t^2 + 3$ , где  $s$  – путь пройденный телом,  $t$  – время. Найдите и ускорение тела в момент времени  $t = 10$ с.

### Пример выполнения ВСР

#### Задание №1

Вычислите производную 2-го порядка функции  $y = \ln \sin \frac{x}{4}$ :

△ Находим вначале первую производную, затем вторую:

$$y' = \left( \ln \sin \frac{x}{4} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x}{4}} \cos \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{4};$$

$$y'' = \left( \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)' = -\frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{16 \sin^2 \frac{x}{4}}. \blacktriangle$$

**Задание №2.** Найдите производную 3-го порядка функции  $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x - 2$  в точке  $x = 2$ .

△ Находим вначале первую производную:

$$f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2,$$

затем вторую от первой производной:

$$(f'(x))' = f''(x) = (20x^3 - 9x^2 + 2)' = 60x^2 - 18x.$$

Третья производная  $f'''(x) = (f''(x))' = (60x^2 - 18x)' = 60 \cdot 2x - 18 = 120x - 18$ .

Вычислим значение 3-й производной в точке  $x = 2$ :

$$f'''(2) = 120 \cdot 2 - 18 = 240 - 18 = 222. \blacktriangle$$

**Задание №3.** Точка движется прямолинейно по закону  $S = 2t^3 + t^2 - 4$ . Найдите величину ускорения в момент времени  $t_0 = 4$ с.

△ Скорость движения точки в любой момент времени  $t$ :

$$v = s'(t) = (2t^3 + t^2 - 4)' = 6t^2 + 2t.$$

Ускорение движения точки в любой момент времени  $t$ :

$$a = s''(t) = (6t^2 + 2t)' = 12t + 2.$$

Тогда ускорение движения точки в момент времени  $t_0 = 4$ с:

$$a(t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \text{ (м/с}^2\text{)}. \blacktriangle$$

## Внеаудиторная самостоятельная работа №3 Исследование функции с помощью производной

Тема 1.3 Дифференциальное исчисление

**Цель:**

- закрепить навыки вычисления производной функции и её применения в исследовании функции.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У1, ОК 5, ОК 9

**Норма времени:** 4 часа

**Рекомендации по выполнению работы:**

- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте теоремы о применении первой производной для определения монотонности и нахождения экстремума функции, применении второй производной для нахождения точек перегиба функции и установления направления выпуклости графика функции.

**Форма отчета:** Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

**Содержание отчета:**

1. Название ВСР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту задания
4. Необходимые вычисления

**Задание:**

Исследовать функцию и построить ее график. Согласно общей схеме исследования:

1. Найти область определения функции  $D(y)$ .
2. Исследовать функцию на чётность-нечётность.
3. Найти экстремумы и промежутки монотонности функции.
4. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.
6. Построить график функции.

Варианты заданий

1.  $f(x)=x^3-2x^2-7x$ ,

6.  $f(x)=2x^3+x^2-8x$ ;

2.  $f(x)=x^3-12x^2+36x$ ,

7.  $f(x)=x^3+x^2-x$ ;

3.  $f(x)=2x^3-3x^2$ ,

8.  $f(x)=x^3-3x^2$ ;

4.  $f(x)=x^3-6x^2$ ,

9.  $f(x)=-x^3+3x$ ;

5.  $f(x)=2-3x+x^3$ ,

10.  $f(x)=-x^3+6x^2$ .

**Пример выполнения ВСР**

Исследовать функцию  $y=x^3-12x-7$  по общей схеме исследования и построить её график.

Δ 1. Область определения  $D(f)=(-\infty;+\infty)$ .

2. Проверим функцию на чётность:

$$f(-x)=(-x)^3-12(-x)-7=-x^3+12x-7 \neq \pm f(x).$$

Функция ни чётная, ни нечётная, т.е. общего вида.

3. Проверим функцию на монотонность и наличие экстремумов.

Производная функции:  $y'=(x^3-12x-7)'=3x^2-12$ .

$y'=0$ , если  $3x^2-12=0$ , т.е.  $x^2=4$  или  $x=\pm 2$ .



Функция убывает при  $x \in (-2; 2)$  и возрастает при  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ .

Т.к. при переходе через точку  $x=-2$  производная меняет знак с «+» на «-», то  $x=-2$  – точка максимума.

Максимум функции  $y_{\max}=(-2)^3-12(-2)-7=-8+24-7=9$ .

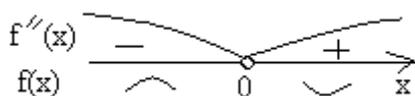
При переходе через точку  $x=2$  производная меняет свой знак с «-» на «+», поэтому  $x=2$  – точка минимума. Минимум функции  $y_{\min}=2^3-12 \cdot 2-7=8-24-7=-23$ .

4. Исследуем функцию на выпуклость.

Найдём вторую производную функции:

$y''=(y')'=(3x^2-12)'=6x-0=6x$ .

$y''=0$ , если  $6x=0$  или  $x=0$ .



Функция выпукла вверх при  $x \in (-\infty; 0)$ , и выпукла вниз при  $x \in (0; \infty)$ .

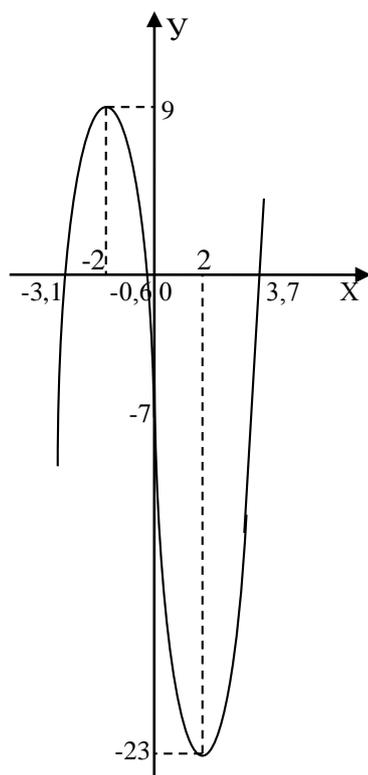
Так как вторая производная при переходе через точку  $x=0$  меняет свой знак, то  $x=0$  – точка перегиба функции.

5. Точки пересечения функции с осями координат:

С Ох:  $y=0$ , т.е.  $x^3-12x-7=0$ ,  $x \approx -3,1$ ,  $x \approx -0,6$  и  $x=3,7$ .

С Оу:  $x=0$ , т.е.  $y=0^3-12 \cdot 0-7=-7$

6. График функции:



## Внеаудиторная самостоятельная работа №4

### Решение прикладных задач на применение определенного интеграла

Тема 1.3 Интегральное исчисление

**Цель:** формирование навыка применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У2, ОК 3

**Норма времени:** 3 часа

**Рекомендации по выполнению работы:**

- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте формулы интегрирования элементарных функций и основные методы интегрирования (метод замены переменной, по частям).

**Справочный материал по приложению определенного интеграла.**

Если непрерывная функция  $f(t)$  характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени  $t$ , то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , выражается формулой

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Если в функции Кобба-Дугласа затраты труда считать линейно зависимыми от времени, а затраты капитала неизменными, то объем продукции  $V$  за  $T$  лет равен

$$V = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt.$$

Если проценты по вкладу начисляются непрерывно и их характеризует функция  $y = f(t)$ , а удельная норма процента равна  $i$ , то дисконтированный доход  $K$  за время  $T$  составляет

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt.$$

Скорость оттока рабочей силы в момент времени  $T$  можно определить при помощи уравнения восстановления

$$L(t) = f(t) + \int_{t_0}^T f(t) L(T-t) dt,$$

где  $f(t)$  – доля тех, кто был вначале (при  $t = t_0$ ) и покинул предприятие в настоящий момент, при  $t = T$ ;  $L(T-t)$  – скорость оттока людей, пришедших кому-то на смену;  $f(t)L(T-t)$  – полная скорость оттока заместителей, покидающих предприятие в настоящий момент.

Общую сумму  $S$  текущих издержек обращения и капиталовложений, сводимых к текущим затратам, можно определить по формуле

$$S = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью  $v = v(t)$ , то пройденный ею за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  путь

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

**Форма отчета:** Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

**Содержание отчета:**

1. Название ВСР
2. Цель работы
3. Исходные данные задания
4. Необходимые вычисления

**Задание.**

Найдите решение следующих задач путем применения определенного интеграла.

№1. Найдите среднее значение издержек  $K(x) = 2x^2 + 3x + 1$  выраженных в денежных единицах, если объем продукции  $x$  изменяется от  $x_1 = 0$  до  $x_2 = 4$ . Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

№2. Найдите объем произведенной продукции за указанные промежутки времени, если производительность труда описывается заданной функцией времени:

$f(t) = 32 + 28t - 9t^2$  за первую половину восьмичасового рабочего дня.

№3. Определите дисконтированный доход  $K$ , если процентная ставка – 8%, первоначальные вложения – 10 млн. руб., прирост – 1 млн. руб. ежегодно, срок – 3 года.

№4. Найдите скорость оттока рабочей силы, если  $f(t)L(T-t) = \sin t \cdot \cos t$ ,  $f(t) = 0,21$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 6$ .

№5. Скорость движения тела задана формулой  $v = 0,1t^3$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени  $T = 10$  с, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток времени?

## Пример выполнения ВСР

### Задача №1

Найти среднее значение издержек  $K(x)=3x^2+4x+2$ , выраженных в денежных единицах, если объем продукции  $x$  меняется от 0 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

**Решение.** Согласно теореме о среднем значении,

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ называется средним значением функции на отрезке } [a; b].$$

В нашем случае

$$f(\xi) = \frac{1}{3} \int_0^3 (3x^2 + 4x + 2) dx = \frac{1}{3} (x^3 + 2x^2 + 2x) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (27 + 18 + 6) = 17 \text{ (ден.ед.)},$$

т.е. среднее значение издержек равно 17. Определим, при каком объеме издержки принимают это значение. Для этого решим уравнение

$$3x^2 + 4x + 2 = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 15 = 0.$$

Так как объем продукции не может быть отрицательной величиной, то

$$\xi = x = \frac{5}{2} \text{ (ед. продукции).}$$

### Задача №2

Найдите объем произведенной продукции, произведенной рабочим за третий час работы, если производительность труда описывается заданной функцией времени  $f(t) = 3t^2 - 2t + 1$ .

**Решение.**  $V = \int_2^3 (3t^2 - 2t + 1) dt = (t^3 - t^2 + t) \Big|_2^3 = 15.$

### Задача №3

Определите дисконтированный доход  $K$ , если процентная ставка – 5%, первоначальные вложения – 5 млн. руб., прирост – 1 млн. руб. ежегодно, срок – 5 лет.

**Решение.** В нашем случае функция капиталовложений, согласно условию задачи, является линейной и равна  $f(t) = k + lt$ , где  $k = 5, l = 1$ , т.е.  $f(t) = 5 + t$ . Удельная норма процента  $i = 0,05$ . Тогда дисконтированный доход равен:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^5 (5 + t) e^{-0,05t} dt = \left[ u = 5 + t, dv = e^{-0,05t} dt, du = dt, v = -20e^{-0,05t} \right] = \\ &= -20e^{-0,05t} (5 + t) \Big|_0^5 + 20 \int_0^5 e^{-0,05t} dt = 20(5 - 10e^{-0,25}) - 400e^{-0,05t} \Big|_0^5 = \\ &= 500 - 600e^{-0,25} \approx 32,72 \text{ (млн р.)}. \end{aligned}$$

#### Задача №4

Найдите скорость оттока рабочей силы, если  $t_0=0$ ,  $f(t)L(T-t)=e^{-\frac{t}{2}}(5-t)$ ,  $T=5$ ,  $f(t)=0,24$ .

Решение. Так как  $L(t) = f(t) + \int_{t_0}^T f(t)L(T-t)dt$ , то

$$L(t) = 0,24 + \int_0^5 e^{-t/2}(5-t)dt = \left[ u = 5-t, dv = e^{-t/2} dt, du = -dt, v = \int_0^5 e^{-t/2} dt = -2e^{-t/2} \right] =$$
$$= 0,24 - 2e^{-t/2}(5-t) \Big|_0^5 - 2 \int_0^5 e^{-t/2} dt = 0,24 + 10 + 4e^{-t/2} \Big|_0^5 = 6,24 + 4e^{-5/2} \approx 6,547.$$

#### Задача №5.

Скорость движения тела задана формулой  $v=0,5t^3$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени  $T=5$ с, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток времени?

Решение.  $S = \int_0^5 \frac{1}{2}t^3 dt = \frac{1}{8}t^4 \Big|_0^5 = 78,125$  м,

$$v_{cp.} = \frac{S}{T} = \frac{78,125}{5} = 15,625 \text{ м/с.}$$

### Внеаудиторная самостоятельная работа №5

#### Нахождение площадей фигур по индивидуальным заданиям

Тема 1.3 Интегральное исчисление

**Цель:** формирование навыка применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: 31, 32, У2, ОК 3

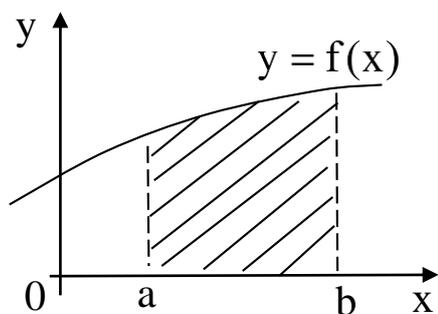
**Норма времени:** 3 часа

**Рекомендации по выполнению работы:**

- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий.

#### Справочный материал

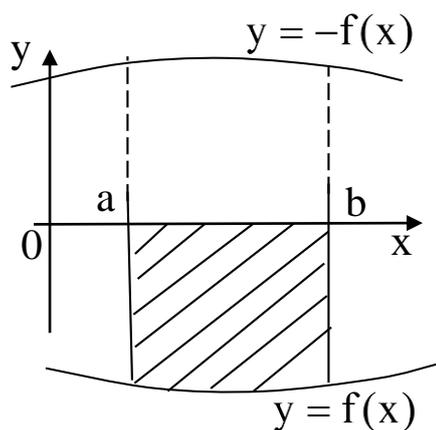
Если задана непрерывная функция  $y = f(x)$  на  $[a,b]$ ,  $f(x) > 0$ , то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис 1).



$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Рис.1

Пусть криволинейная трапеция с основанием  $[a,b]$  ограничена снизу кривой  $y = f(x)$  (рис. 2), то из соображений симметрии видим, что



$$S = -\int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Рис.2

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (1) или (2) (рис. 3 и 4)

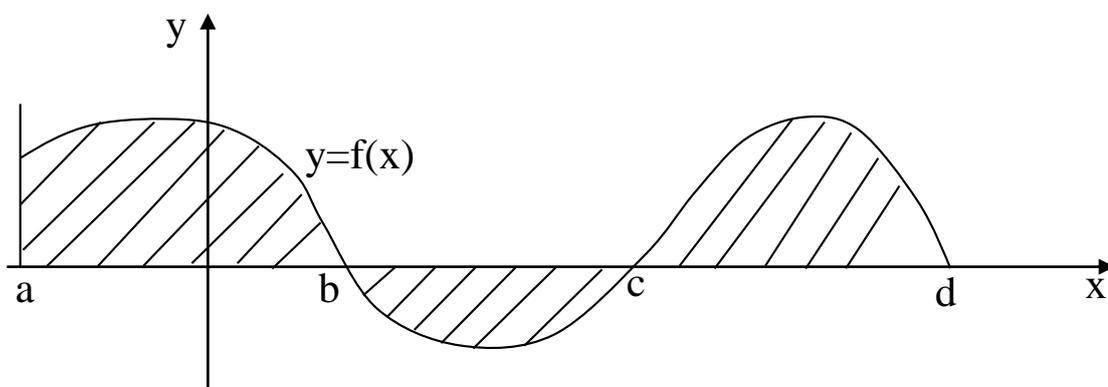
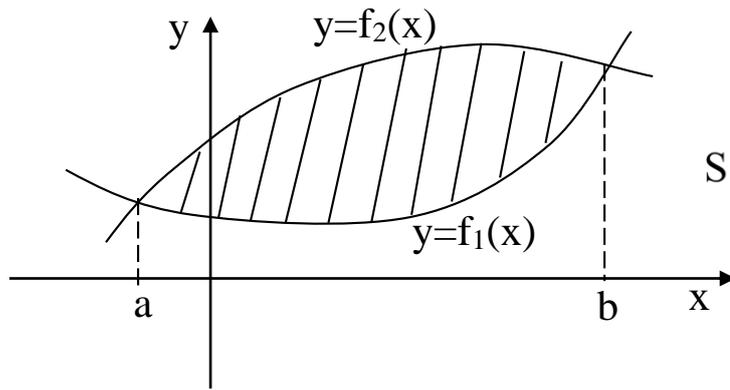


Рис.3

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \quad (3)$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (4)$$

Рис.4

**Форма отчета:** Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

**Содержание отчета:**

1. Название ВСР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

**Задание:**

Выполните задания по индивидуальным вариантам.

1. а)  $y = -x^2 + 4, y = 0;$  б)  $y = x^2; y = \frac{x^3}{3}.$
2. а)  $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2;$  б)  $y = x^2; y = \sqrt{x}.$
3. а)  $y = -x^2 - 1, x = 1, x = 4, x = 0;$  б)  $y = 1 + x^2; y = x + 3.$
4. а)  $y = \sqrt{x}; x = 9; y = 0;$  б)  $y = x^2 - 1; y = 1 - x$
5. а)  $y = x^2 + 2x + 2; x = 0; x = -3; y = 0.$   
б)  $y = x + 1; y = x^2 + 2x + 1.$
6. а)  $y = -\frac{1}{x}; y = 0; x = -1; x = -2.$  б)  $y = x - 1; y = x^2 - 2x + 1.$
7. а)  $y = 3x^2 - 6x, x = 4, y = 0;$  б)  $y = \ln x; x = e; y = 0.$
8. а)  $y = 2x^2 + 3x - 9, y = 0;$  б)  $y = x^2; x + y = 2.$
9. а)  $y = x^2 + 6x + 5, y = 0;$  б)  $y = x^2 + 1; y = 3 - x^2.$
10. а)  $y = 2x^2, x = 1, x = 2, y = 0;$  б)  $y = 2^x; y = 1; x = 1.$
11. а)  $y = 0, 25x^3$  на отрезке  $[0; 2], x = 2, y = 0;$  б)  $y = x^2, y = \frac{1}{x},$  если  $1 \leq x \leq e.$
12. а)  $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, y = 0;$  б)  $y = 0, 5x^2, y = x.$
13. а)  $y = x - 1, x = -4, x = -2, y = 0;$  б)  $x - 2y + 4 = 0, 3x + 2y - 12 = 0, y = 0.$
14. а)  $y = -x^2 - 1, x = 1, x = 4, y = 0;$  б)  $y = x^2, y = -x^2 + 2.$
15. а)  $y = x^2 - 6x, x = 0;$  б)  $y = x^2$  и прямой  $y = 2x.$
16. а)  $y = 4x - x^2, x = 0, x = 3;$  б)  $y = 8 + 2x - x^2, y = x + 6.$
17. а
18. а)  $y = \sin x$  и  $y = 0,$  если  $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2};$  б)  $y = x^3, y = 8.$
19. а)  $y = -x^2 + 4, y = 0;$  б)  $y = -x^2, x + y + 2 = 0.$

y

=

-

20. а)  $y = -x^2 + 9, y = 0$ ; б)  $y = x^2 - 4, x + y + 2 = 0$ .  
 21. а)  $y = x^2, y = 9$ ; б)  $y = x^2, y = 3x$ .  
 22. а)  $y = 0, 5x^3, x = -2, x = 4, y = 0$ ; б)  $2x - y^2 = 0, 2x - y - 6 = 0$   
 23. а)  $y = x^2 - 9, y = 0$ ; б)  $2x + y^2 = 0, 2x + 5y - 6 = 0$ .  
 24. а)  $y = \frac{1}{x}, x = 5, x = 10, y = 0$ ; б)  $2x - y^2 = 0, 2x + y - 6 = 0$ .  
 25. а)  $y = e^{-x}, x = 0, x = 4, y = 0$ ; б)  $6x - y^2 = 0, 6x + y - 12 = 0$ .

### Пример выполнения ВСР

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$  и  $y = -x$ .

*Решение.*  $y = 2x - x^2$  – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$$y' = 2 - 2x; \quad y' = 0 \text{ или } 2 - 2x = 0, \quad x = 1$$

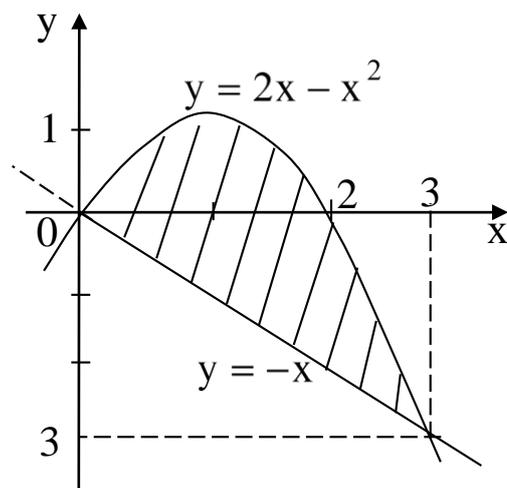
Если  $x_0 = 1$ , то  $y_0 = 2 - 1 = 1$ .  $M_0(1; 1)$  – вершина параболы.

$$y = 0 \text{ или } 2x - x^2 = 0 \text{ или } x(2 - x) = 0 \quad x = 0; \quad x = 2.$$

$y = -x$  – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$$2x - x^2 = -x \text{ или } x^2 - 3x = 0 \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$



Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left( 3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \\ &= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

## **Внеаудиторная самостоятельная работа №6** **Подготовка сообщения по теме «Виды матриц»**

Раздел 2. Элементы линейной алгебры

Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.

**Цель:** изучить виды матриц и систематизировать знания по разновидностям матриц.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З1, У1, ОК 2, ОК 4, ОК 6

**Норма времени:** 3 часа

### **Рекомендации по выполнению работы:**

*Информационное сообщение* – это вид внеаудиторной самостоятельной работы по подготовке небольшого по объёму устного сообщения для озвучивания на семинаре, практическом занятии. Сообщаемая информация носит характер уточнения или обобщения, несёт новизну, отражает современный взгляд по определённым проблемам.

Сообщение отличается от докладов и рефератов не только объёмом информации, но и её характером – сообщения дополняют изучаемый вопрос фактическими или статистическими материалами. Оформляется задание письменно, оно должно включать элементы наглядности (презентацию).

*Регламент времени на озвучивание сообщения* – до 7 мин.

*Алгоритм подготовки сообщения:*

- собрать и изучить литературу по теме;
- составить план или графическую структуру сообщения;
- выделить основные понятия;
- ввести в текст дополнительные данные, характеризующие объект изучения;
- оформить текст письменно;
- сдать на контроль преподавателю и озвучить в установленный срок;
- Подготовить презентацию к выступлению.

*Общие требования к презентации:*

- Презентация не должна быть меньше 10 слайдов.
- Первый лист – это титульный лист, на котором обязательно должны быть представлены: название сообщения; название техникума; фамилия, имя, отчество автора; курс.
- Следующие слайды представлять основные этапы презентации;
- Дизайн-эргономические требования: сочетаемость цветов, ограниченное количество объектов на слайде, цвет текста.
- В презентации необходимы импортированные объекты из существующих цифровых образовательных ресурсов.
- Слайд должен содержать минимум текста сообщения, отображать формулы, графики, схемы, таблицы, рисунки.
- Последним слайдом презентации должен быть список литературы.

*Критерии оценки:*

- актуальность темы;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала;
- грамотность и полнота использования источников;
- наличие элементов наглядности.

*Оценка «5» (отлично)* выставляется, при актуальности темы; соответствии содержания теме; глубокой проработки материала; грамотность и полнота использования источников; наличие элементов наглядности. Обучающийся четко и ясно озвучивает сообщение, а не зачитывает.

*Оценка «4» (хорошо)* выставляется, при актуальности темы; соответствии содержания теме; грамотность и полнота использования источников; отсутствия элементов наглядности. Обучающийся четко зачитывает сообщение.

*Оценка «3» (удовлетворительно)* выставляется, если сообщение не вполне соответствует содержанию темы; отсутствуют элементы наглядности. Обучающийся монотонно зачитывает сообщение.

*Оценка «2» (неудовлетворительно)* – тема сообщения не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы.

## **Внеаудиторная самостоятельная работа №7** **Нахождение определителя матрицы**

Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

**Цель:** систематизировать знания и отработать навыки вычисления определителя квадратных матриц.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З1, У1, ОК 2, ОК 4, ОК 6

**Норма времени:** 3 часа

**Рекомендации по выполнению работы:**

- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий;
- воспользуйтесь, где уместно, свойствами определителей:

### **Свойства определителей**

1. Если квадратная матрица  $A^T$  является транспонированной матрицей  $A$ , то их определители совпадают  $|A^T| = |A|$ , т.е. определитель не меняется, если заменить его строки столбцами и наоборот, например, для определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке 2-х строк или столбцов определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, т.е., например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя на число  $\lambda$  равносильно умножению определителя на это число  $\lambda$ .

Например,  $3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}$ , тогда как  $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ .

Иными словами, общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) определителя можно вынести за знак этого определителя.

Например,  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ , тогда как  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Например,  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , т.к. его 1-я и 2-я строки пропорциональны с

коэффициентом пропорциональности  $k=2$ .

7. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель  $\lambda$ , то величина определителя не изменится. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. *Определитель произведения матриц.* Если  $C = AB$ , где  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы (одинакового порядка), то  $|C| = |A| \cdot |B|$ .

*Замечание:* Из свойства 8 вытекает, что даже, если  $AB \neq BA$ , то  $|AB| = |BA|$ , если  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы одинакового порядка.

9. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Например, 
$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 = -90.$$

**Форма отчета:** Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

**Содержание отчета:**

1. Название ВСР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

**Задание:**

Вычислите определители, заданные по вариантам.

1 вариант а)  $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ .

2 вариант а)  $\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 14 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ .

3 вариант а)  $\begin{vmatrix} 4 & -11 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ .

4 вариант а)  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ .

5 вариант а)  $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 32 & 9 & 11 \\ 2 & 10 & 6 \\ 8 & 40 & 24 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ .

6 вариант а)  $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 15 \\ 4 & 1 & 5 \\ 81 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

7 вариант а)  $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 11 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ .

8 вариант а)  $\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 36 & -5 & 6 \\ 24 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -7 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ .

9 вариант а)  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 14 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

10 вариант а)  $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

### Пример выполнения ВСР

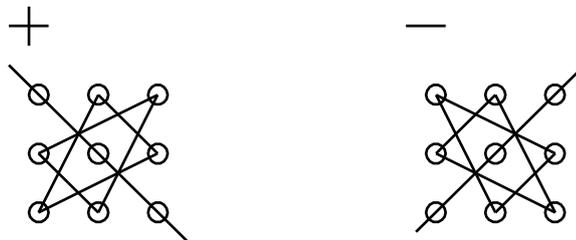
Вычислите определители

а)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Решение:

а)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 = 18 + 8 = 26$ .

б) Воспользуемся правилом треугольников



$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 5 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 6 = 95$$

в)  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , т.к. его 1-я и 2-я строки пропорциональны с коэффициентом

пропорциональности  $k=2$ .

г) Умножая первую строку на  $-1$ , прибавим её ко второй и четвёртой строкам определителя. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

Далее умножим первую строку на  $-3$  и сложим её с третьей строкой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца и преобразуем его:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

Далее опять обращаем в нуль все элементы первого столбца, кроме одного, для чего умножим первую строку на  $-7$  и прибавим ко второй строке, чтобы на месте элемента  $-7$  получить нуль, а затем вычислим определитель второго порядка:

$$\Delta = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-27 + 15) = 48.$$

### Внеаудиторная самостоятельная работа №8

#### Применение метода Гаусса к решению систем линейных алгебраических уравнений

Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

**Цель:** отработать навыки решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З1, У1, ОК 2, ОК 4, ОК 6

**Норма времени:** 3 часа

**Рекомендации по выполнению работы:**

- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий.

**Форма отчета:** Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

**Содержание отчета:**

1. Название ВСР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

**Задание:**

Методом Гаусса найти решение системы линейных уравнений. Варианты заданий:

$$1. \begin{cases} 5x + z = 11; \\ x + 3y - z = 4; \\ -3x + 2y + 10z = 6. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - z = -3; \\ -x + 3y + z = 2; \\ x - y + 4z = 3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - z = 1; \\ x - 3y + z = 2; \\ x + y + 3z = 4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x + y - z = -5; \\ -x + 3y + z = 5; \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x + y - z = 1; \\ -2x + 4y + z = 5; \\ x + y + 3z = -3. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + y - z = 6; \\ 2x + 4y + z = 9; \\ x - y + 3z = 4. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - y = -2; \\ 2x + 5y - 2z = -4; \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x - y + z = 1; \\ 2y - z = 3; \\ -x + y + 5z = -5. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4x + y - z = 7; \\ 2x + 3y = 7; \\ x - y + 5z = 11. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x - z = 1; \\ x - 4y + 2z = -5; \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$$

**Пример выполнения ВСР**

$$\text{Решить систему } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \text{ методом Гаусса.}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к верхнетреугольному виду путём элементарных преобразований над строками (для краткости записи обозначим 1-ю, 2-ю и 3-ю строки соответственно  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ ):

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} C_2 + (-2)C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} C_2 - C_3 \\ C_3 - 2C_2 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

В ходе элементарных преобразований мы получили равносильную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим  $x_3 = 1$ .

Из второго уравнения выразим  $x_2 = 0 + 2x_3 = 2$ .

Из первого уравнения найдём  $x_1 = 3 + x_2 - x_3 = 3 + 2 - 1 = 4$ .

Ответ: (4; 2; 1).

## Рекомендуемая литература

### Основные источники

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449006>

### Дополнительные источники

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.- изд.: «Академия», 2009
3. Валуце И.И., Математика для техникумов.- изд.: наука,2010
4. Гусев В.А., Григорьев С.Г, Иволгина С.В. Математика. Для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник: Рекомендовано ФГАУ «ФИРО». — 5-е изд., стер. , - М., ОИЦ «Академия», 2020.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.- М.:Ком.Книга.2009
6. Подольский А.В. Сборник задач по математике.-Изд.: АСТ-Пресс Книга, 2008

### Интернет-ресурсы:

7. Сайт министерства образования и науки РФ. – URL: <http://mon.gov.ru> (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
8. Российский образовательный портал. – URL: <http://edu.ru> (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
9. Сайт ФГОУ Федеральный институт развития образования. –
10. Математика, высшая математика, алгебра, геометрия, дискретная математика.– URL: <http://matembook.chat.ru/> (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
11. Математика on - line. В помощь студенту. Основные математические формулы по алгебре, геометрии, тригонометрии, высшей математике. – электронный.