Министерство образования и науки Республики Марий Эл
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Республики Марий Эл
«Йошкар-Олинский техникум сервисных технологий»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов по выполнению практических работ по дисциплине
ЕН.01 Математика

Раздел 1. Элементы теории множеств и математической логики
Раздел 2. Развитие понятия о числе

40.02.01 Право и организация социального обеспечения

2022г.

РАССМОТРЕННО
на заседании ПЦК общеобразовательных дисциплин и дисциплин направления «Социальная работа»
Председатель ПЦК ______/ В.Н. Петрова/
Протокол № 7 от «21» 02 20 22 г.

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УР
________/Н.П. Житомирова /
«20» 04 20 22 г.

Составитель: Житомирова Н.П., преподаватель первой квалификационной категории ГБПОУ Республики Марий Эл «ЙОТСТ»

Рецензенты:

1) Николаева Е.А., преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ Республики Марий Эл «ЙОТСТ»

Методические указания для студентов по выполнению практических работ.

Изложен ход практических работ, приведены задания для выполнения практических работ, контрольные вопросы, справочный материал, план отчета. Методические указания предназначены в первую очередь для студентов, а также преподавателей учреждений среднего профессионального образования

РЕЦЕНЗИЯ

на методические указания для студентов по выполнению практических работ
по дисциплине ЕН.01 Математика
специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Методические указания для студентов по выполнению практических работ предназначено для обучающихся образовательных организаций среднего профессионального образования и соответствуют требованиям Федерального Государственного образовательного стандарта среднего профессионального по специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения.

Методические указания включают в себя: введение, указания к выполнению практических работ, правила выполнения работы критерии оценки, методические указания по выполнению практических работ, литературу.

Во введении рассмотрены цель и назначение методических указаний, цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины.

В указаниях даются общие рекомендации по выполнению и оформлению практических работ.

Правила выполнения работы диктуют набор действий, который должен быть проведён при выполнении каждой практической работы. Перечень практических работ и указаний к ним соответствует рабочей программе по дисциплине ЕН.01 Математика.

Оценивание практических работ проводится по пятибалльной системе по заданным критериям.

Источники в разделе «Литература» содержат теоретические сведения и примеры решения практических заданий.

Элементы теории к каждой теме задают оптимальный багаж знаний для успешного выполнения практических работ. Разобранные примеры, являясь образцом решения, помогут правильно оформить математические записи. Перечень вопросов для повторения после каждой темы позволяют студентам в очередной раз проработать теоретический материал.

Цель методических указаний – обеспечить четкую организацию проведения практических занятий со студентами и предоставить возможность студентам, отсутствовавшим на практическом занятии, самостоятельно выполнить работу. Их использование студентами повысит эффективность процесса обучения и позволит преподавателю достигнуть более высокого уровня качества знаний.

В целом методические указания актуальны, составлены грамотно, написаны доступным языком, ориентированы на реальный учебный процесс в образовательной организации среднего профессионального образования и могут быть рекомендованы к использованию преподавателями при подготовке студентов по дисциплине ЕН.01 Математика на специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения.

Преподаватель высшей
квалификационной категории
ГБПОУ Республики Марий Эл
«ЙОТСТ»

Е.А. Николаева

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящие методические указания составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине ЕН.01 Математика для студентов специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения (базовая подготовка). Программа предназначена для реализации требований ФГОС к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по данной специальности среднего профессионального образования и является единой для всех форм обучения.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

У1. Решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;

У2. Применять основные методы интегрирования при решении задач;

У3. Применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности.

знать:

З1. Основные понятия и методы математического анализа;

З2. Основные численные методы решения прикладных задач.

Освоение учебной дисциплины должно способствовать формированию следующих общих компетенций:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы

Для закрепления теоретических знаний и приобретений необходимых практических знаний и умений рабочей программой по дисциплине «Математика» предусмотрено проведение практических занятий.

Практические работы выполняются для закрепления и систематизации теоретических знаний студентов по дисциплине и приобретения необходимых практических умений, развитию навыков самостоятельной работы.

Выполнение практических работ предусматривает применение необходимых формул и проведение соответствующих расчетов.

Цель методических указаний - обеспечить четкую организацию проведения практических занятий со студентами и предоставить возможность студентам, отсутствовавшим на практическом занятии, самостоятельно выполнить работу.

1. Указания к выполнению практических работ

1. Практические работы нужно выполнять в специально отведенной тетради в клетку, чернилами синего или черного цвета.
2. Условие каждого задания переписывается полностью или делается краткая запись «Дано» (если это возможно), затем выполняется решение задания и записывается ответ. Иногда ответ можно не записывать (ответом служит график, таблица и т.п.).
3. Все рисунки и схемы выполняются карандашом, с помощью линейки.
4. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
5. Задания можно выполнять в произвольном порядке
6. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.

2. Правила выполнения работы

1. Прочитайте название практической работы, уясните для себя цель работы.
2. Внимательно прочитайте пояснения к работе.
3. Разберите решения типовых примеров.
4. Выполните задания по вариантам.
5. Оформите отчет и сдайте тетрадь на проверку преподавателю.

3. Критерии оценки

Оценка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обоснованиях решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Оценка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Оценка «3» ставится, если:

- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

Оценка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

4. Методические указания к выполнению практических работ

4.1. Практическая работа 1. Решение задач по вычислению пределов функций.

Цель работы: научиться вычислять значения основных тригонометрических функций, применяя основные тригонометрические тождества, формулы сложения аргументов, формулы двойного и половинного аргументов.

Пояснения к работе

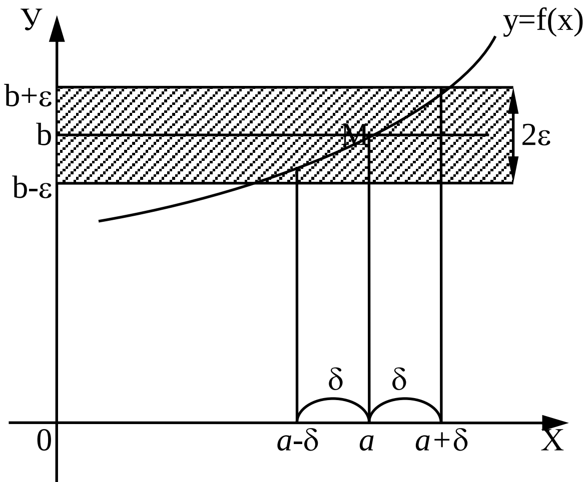


Рисунок 1

Число b называется *пределом функции $f(x)$* при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число δ, что $|f(x)-b|<\varepsilon$ как только $|x-a|<\delta$.

Если $f(x) \to b$ при $x \to a$, то на графике функции $y=f(x)$ это иллюстрируется следующим образом (рис.1): так как из неравенства $|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-b|<e$, то это значит, что для всех точек x, отстоящих от точки a не далее, чем на b, точки M графика функции $y=f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$.

Если $f(x)$ стремится к пределу b при x, стремящемся к некоторому числу a так, что x принимает только значения, меньшие a, то пишут $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ и b_1 называют *пределом функции в точке а слева*.

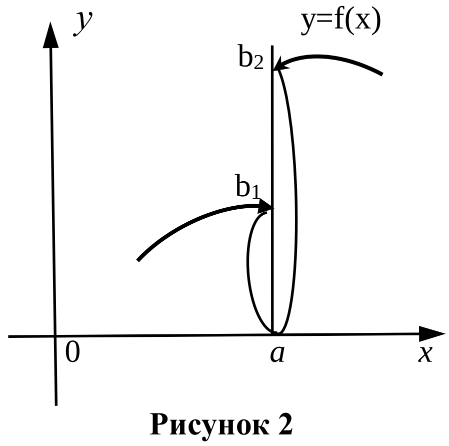


Рисунок 2

Если x принимает только значения, большие a, то пишут $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ и b_2 называют *пределом функции в точке а справа* (рис. 2).

Если предел справа и предел слева существуют и равны, т.е. $b_1=b_2=b$, то b и будет пределом в смысле данного выше определения предела в точке a. И обратно, если существует предел функции b в точке a, то существуют пределы функции в точке a справа и слева и они равны.

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке $x=a$, если ее предел в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Аналогично определяются бесконечно малые при $x\to\pm\infty$, $x\to a+0$ и др.

Например, бесконечно малыми функциями являются:

1) $f(x)=x^2$ при $x\to 0$; 2) $y=x-2$ при $x\to 2$.

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке $x=a$, если ее предел в этой точке равен бесконечности: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Теорема. *Если f(x) - бесконечно малая функция при x→ a, то* $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ *- бесконечно большая функция при x→ a и наоборот.*

Например, бесконечно большой является функция $y=\dfrac{2}{x-3}$ при $x\to 3$, т.е. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{x-3}=\infty$.

<u>Основные теоремы о пределах</u>

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

Например, $\lim\limits_{x\to 2}(3+x)=\lim\limits_{x\to 2}3+\lim\limits_{x\to 2}x=3+2=5$.

3. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

Например, $\lim\limits_{x\to -1}(5x-4)=\lim\limits_{x\to -1}5x-\lim\limits_{x\to -1}4=5\lim\limits_{x\to -1}x-4=5\cdot(-1)-4=-9$.

4. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует также предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, равный отношению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

5. Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной:

$$\lim x^n=(\lim x)^n$$

Пример. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-x^3}{2x^5+x^2}$; в). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{0}{0}$ - неопределенность.

Указания:

1. Выписать квадратный трёхчлен отдельно и приравнять его нулю $ax^2+bx+c=0$.

2. Решить получившееся квадратное уравнение.

3. Разложить квадратный трёхчлен, стоящий под знаком предела, на множители: $a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения.

4. Сократить один из множителей.

5. Вычислить предел.

а) $x^2-3x+2=0$; $D=(-3)^2+4\cdot1\cdot(-2)=9-8=1$; $x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2}=1$; $x_2=\frac{3+\sqrt{1}}{2}=2$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{1-2}=-1.$$

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2-x^3}{2x^5+x^2}=\frac{0}{0}$ - неопределенность. Вынесем общий множитель (младшую степень) числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to0}\frac{4x^2-x^3}{2x^5+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(4-x)}{x^2(2x^3+1)}=\lim_{x\to0}\frac{4-x}{2x^3+1}=\frac{4-0}{2\cdot0^3+1}=4.$$

в) Умножим числитель и знаменатель на сумму корней $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$, чтобы применить формулу сокращённого умножения $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{2+x}\right)^2-\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2+x-2+x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{5\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\frac{2}{5\left(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}\right)}=\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

<u>Предел функции на бесконечности</u>

Пусть функция f(x) определена на всей числовой прямой. Число B называется *пределом функции f(x) при $x\to\infty$*, если $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=B$ для любой последовательности аргументов $\{x_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$: $x_т\neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$, то говорят, что *предел функции f(x) в точке a есть бесконечность* и пишут

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

Пример. Вычислить предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2}{5x^5+4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^6+x^4}{7x^5-5x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{6x^3-5}$.

Решение. Разделим все слагаемые числителя и знаменателя на старшую степень, содержащуюся в дроби.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2}{5x^5+4x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3x^4}{x^5}+\dfrac{x^2}{x^5}}{\dfrac{5x^5}{x^5}+\dfrac{4x^2}{x^5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{5+\dfrac{4}{x^3}}=\dfrac{0+0}{5+0}=0$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^6+x^4}{7x^5-5x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{-x^6}{x^6}+\dfrac{x^4}{x^6}}{\dfrac{7x^5}{x^6}-\dfrac{5x^3}{x^6}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{x^3}}=\dfrac{-1+0}{0-0}=\dfrac{-1}{0}=-\infty$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2}{6x^3-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}}{\dfrac{6x^3}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{6-\dfrac{5}{x^3}}=\dfrac{1+0}{6-0}=\dfrac{1}{6}$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Теорема. Предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$ в точке x=0 существует и равен *единице*, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

Предел (1) называется *первым замечательным пределом* и применяется при вычислении ряда других пределов. Рассмотрим несколько примеров на применение предела (1).

Пример. Найти предел функции $\dfrac{2\sin 5x}{8x}$ при x→0.

Указание: предел вида $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$ преобразуют так, чтобы использовать 1-й замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=a\cdot 1=a$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x}{8x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{8x}=\dfrac{2}{8}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\dfrac{1}{4}\dfrac{5}{1}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\dfrac{5}{4}\cdot 1=\dfrac{5}{4}=1{,}25$

Второй замечательный предел

Теорема. Предел функции $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при x→∞ существует и равен e, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (2)$$

Или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Предел (2) называется *вторым замечательным пределом* и применяется при вычислении ряда других пределов. *e = 2.718281…*

Число e - иррациональное число, e ≈ 2,72.

Число e имеет важное значение в математическом анализе. Оказывается, что это число является наиболее удобным в качестве основания логарифмов, хотя оно иррационально.

Пока видно, что 2<e<3. Логарифмы по основанию e называются натуральными логарифмами. Для обозначения натурального логарифма числа x пользуются символом ln x.

Пример Вычислить предел функции: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{8}{x}}$

Указание: В пределах вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{bx}\right)^{x}$ сделать замену $\frac{a}{bx}=\frac{1}{y}$, откуда x=$\frac{a}{b}$ y.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3\cdot 5y}=\left(\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{15}=e^{15}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{8}{x}}=(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})^{8}=e^{8}$.

Задание и ход работы

1. Выполнить задания по вариантам
2. Ответить на контрольные вопросы.

Вариант 1

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^3-6x^2+x-5\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7\sin 3x}{2x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}$, используя 2-й замечательный предел

Вариант 2

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{5e^x-1}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+4x-5}{x+5}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x}{5x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$, используя 2-й замечательный предел

Вариант 3

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+\dfrac{5}{x+1}\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+7x+12}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8}{2x-2}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 4x}{2x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{3}{5z}}$, используя 2-й замечательный предел

Вариант 4

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{7x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{x}$, используя 2-й замечательный предел..

Вариант 5

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{x+3}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{4-\sqrt{2x-2}}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x}{3x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}}$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 6

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x-9}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 7x}{3x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{7x}\right)^{x}$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 7

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\sin\dfrac{x}{3}+1\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-9x+20}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-5x}-1}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{5x}$, используя 1-й замечательный предел;

е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{6}{x}}$, используя 2-й замечательный предел.

Вариант 8.

Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+4x^2+x-7\right)$ непосредственным вычислением предела функции в точке;

б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{3x^2+7x-6}$ разложением функции на множители;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+3x}-2}{x}$ «домножением» функции до разности квадратов;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$ на бесконечности;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 4x}{3x}$, используя 1-й замечательный предел;

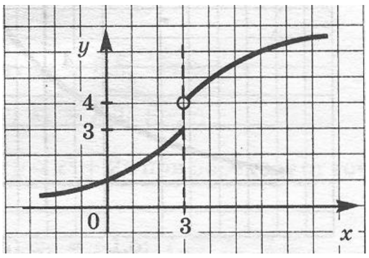
е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{6}{7x}\right)^x$, используя 2-й замечательный предел.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления
5. Ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции в точке x_0.
2. Дайте определение односторонних пределов в точке x_0.
3. По графику функции определите, чему равны:



а) $\underset{x\to 3-0}{Lim} f(x)$; б) $\underset{x\to 3+0}{Lim} f(x)$; в) f(3).

4. Перечислите условия существования предела функции y=f(x) в точке x_0. Приведите пример функции, не имеющей предела в точке x=0.
5. Перечислите основные свойства пределов функций.
6. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой функций. Приведите примеры.
7. Что называется пределом функции на бесконечности. Приведите пример.

4.2. Практическая работа 2 Определение непрерывности функции, точек разрыва функции

Цель – закрепить навыки решения задач на установление, существования предела, непрерывности функции и определение точек разрыва.

Пояснения к работе

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки a. Функция f(x) называется *непрерывной* в точке a, если предел этой функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Используя условия существования предела, можно написать условия непрерывности в следующей форме:

Функция f(x) непрерывна в точке *a*, если пределы справа и слева в этой точке равны значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

Точками *разрыва* функции называются точки, в которых функция *не определена* или не является *непрерывной*.

Точки разрыва классифицируются следующим образом.

Устранимый разрыв. Точка *a* называется *точкой устранимого разрыва* функции f(x), если предел функции в этой точке существует, но в точке *a* функция либо не определена, либо ее значение *f(a)* не равно пределу в этой точке (Рис. 3).

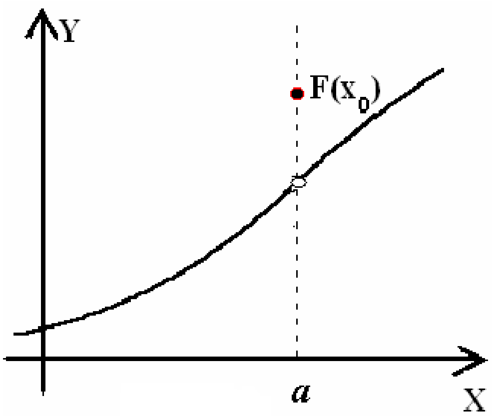


Рис. 3

Разрыв 1-го рода. Точка *a* называется *точкой разрыва первого рода* функции *f(x)*, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x)$ (Рис. 4)

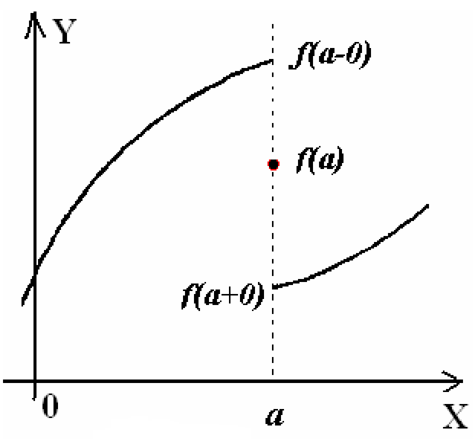


Рис. 4

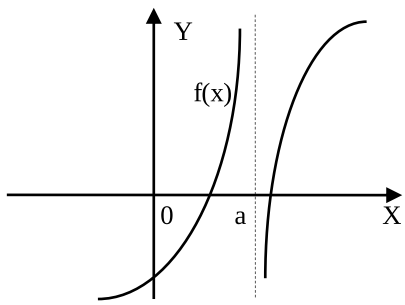
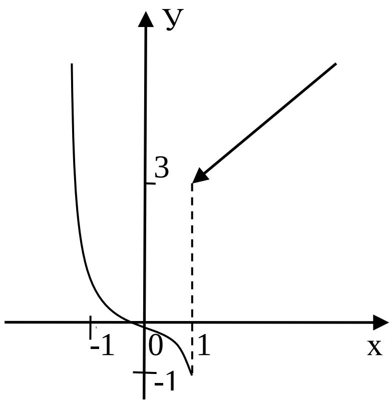


Рис. 5

Разрыв 2-го рода. Точка *a* называется *точкой разрыва второго рода* функции *f(x),* если в этой точке функция *f(x)* *не имеет* по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов *бесконечен* (Рис.5).

Кусочно-непрерывные функции. Функция *f(x)* называется *кусочно-непрерывной* на отрезке [a;b], если она непрерывна во всех внутренних точках [a;b], за исключением, быть может, *конечного* числа точек, в которых имеет разрыв 1-го рода и, кроме того, односторонние пределы в точках *a* и *b*.



Пример. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x) = \begin{cases} -x^3, & если \quad x \le 1 \\ 2+x, & если \quad x > 1 \end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.

△ Функция кусочно-непрерывная. Построим график функции на участке (-∞; 1]. В этом случае f(x)=-x^3. Построим график по точкам, включая граничную x=1

x	-2	-1	0	1
y	8	1	0	-1

На промежутке (1;∞) функция f(x)=2+x. График функции – прямая. Строим по двум точкам – граничной x=1 и любой, например, x=3>1.

x	1	3
y	3	5

Стрелка показывает, что график стремится к точке (1;3), но не достигает, т.к. x=1 не входит в промежуток (1;∞).

Пределы слева и справа в точке x=1 – точке разрыва типа «скачок»:

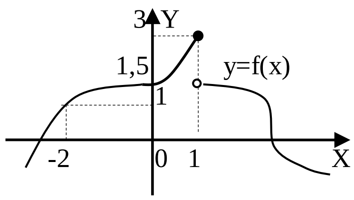
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1}(-x^3) = -1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1}(2+x) = 3.$$

Пример. По графику функции определите

:а) Чему равно значение функции в точках x=-2, x=1?

б) Существует ли предел функции в указанных точках и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dots$).

в) Укажите характер разрыва функции в точках.



Решение. а) f(-2)=1, f(1)=3.

б) Предел функции в точке x=-2 существует и $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$.

В точке x=1 предел не существует, т.к. левый предел не равен правому пределу в этой точке: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 3 \neq \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1$.

в) В точке x=1 имеем разрыв типа «скачок».

Пример. При каком значении А функция $y = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+7x+12} & при \quad x \neq -3 \\ A \quad при & x = -3 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x=-3?

Решение. A= $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+7x+12} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{(x+3)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{-3+4} = 1$.

Пример. При каком значении А функция y= $\begin{cases} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} & при \quad x \neq 16 \\ A & при \quad x = 16 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x=16?

Решение.

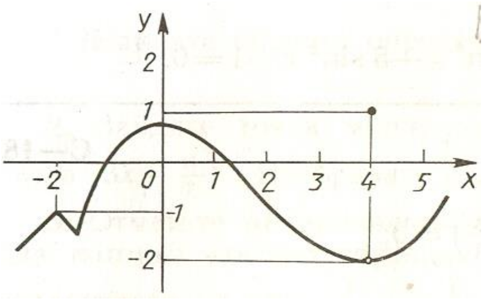
A= $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{(\sqrt{x})^2-4^2}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-4} = \lim\limits_{x\to 16}(\sqrt{x}+4) = \sqrt{16}+4 = 8$

Задание и ход работы

1.Изучите теоретический материал и выполните задания.

1 вариант

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}\sin x, & если \quad x\le -\pi\\ x, & если \quad x>-\pi\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.



2. По графику функции определите:

а) Чему равно значение функции в точке x=4?

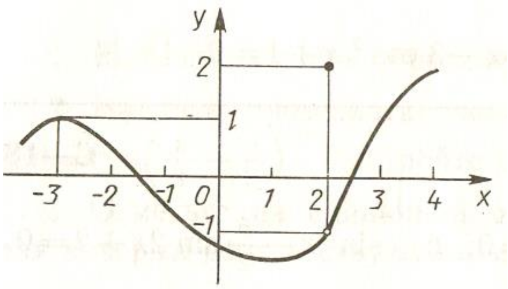
б) Существует ли предел функции в точке x=4 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\ldots$).

в) Укажите характер разрыва функции в точке x=4.

3. При каком значении A функция $y=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2+7x+12} & при \quad x\ne -3,\\ A \quad при \quad x=-3\end{cases}$ будет непрерывной в точке x=-3?

2 вариант

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & если \quad x\le 2\\ 2x-3, & если \quad x>2\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.



2. По графику функции определите:

а) Чему равно значение функции в точке x=2?

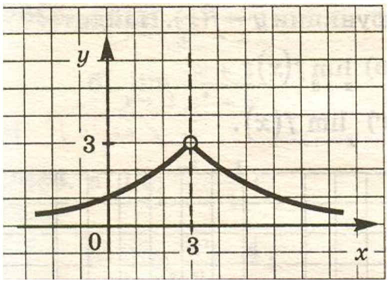
б) Существует ли предел функции в точке x=2 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\ldots$).

в) Укажите характер разрыва функции в точке x=2.

3. При каком значении A функция $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & при \quad x\ne 2,\\ A \quad при \quad x=2,\end{cases}$ будет непрерывной в точке x=2?

3 вариант

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & если \quad x\le 0\\ x+1, & если \quad x>0\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.



2. По графику функции определите:

а) Чему равно значение функции в точке x=3?

б) Существует ли предел функции в точке x=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ldots$).

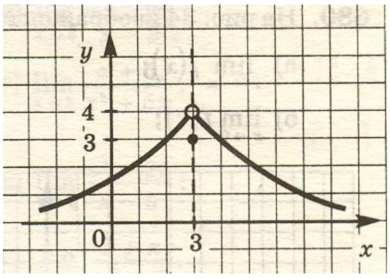
в) Укажите характер разрыва функции в точке x=3.

3. При каком значении A функция

$$y=\begin{cases}\dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5} & при \quad x\neq 25\\ A \quad при \quad x=25\end{cases}$$ будет непрерывной в точке x=25?

<u>4 вариант</u>

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & если \quad x\leq -1\\ x-3, & если \quad x>-1\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.



2. По графику функции определите:

а) Чему равно значение функции в точке x=3?

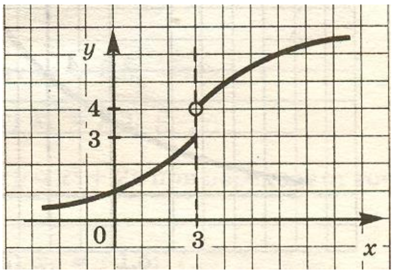
б) Существует ли предел функции в точке x=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ldots$).

в) Укажите характер разрыва функции в точке x=3.

3. При каком значении A функция $y=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2+6x+8} & при \quad x\neq -2,\\ A \quad при \quad x=-2\end{cases}$ будет непрерывной в точке x=-2?

<u>5 вариант</u>

1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & если \quad x\leq -1\\ x-3, & если \quad x>-1\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.



2. По графику функции определите:

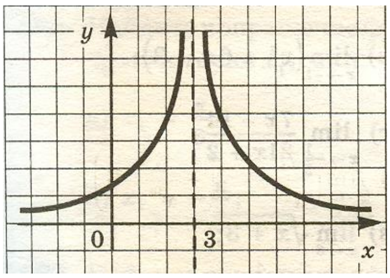
а) Чему равно значение функции в точке x=3?

б) Существует ли предел функции в точке x=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ldots$).

в) Укажите характер разрыва функции в точке x=3.

3. При каком значении A функция $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-49}{x-7} & при \quad x\neq 7,\\ A \quad при \quad x=7\end{cases}$ будет непрерывной в точке x=7?

<u>6 вариант</u>



1. Постройте график кусочно-непрерывной функции $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & если \quad x\leq -1\\ x-3, & если \quad x>-1\end{cases}$ и найдите левый и правый пределы в указанной точке.

2. По графику функции определите:

а) Чему равно значение функции в точке x=3?

б) Существует ли предел функции в точке x=3 и если да, то чему он равен ($\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\ldots$).

в) Укажите характер разрыва функции в точке x=3.

3. При каком значении А функция $y = \begin{cases} \dfrac{x-81}{\sqrt{x}-9} & при \quad x \neq 81 \\ A \quad при & x = 81 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x=81?

Содержание отчета

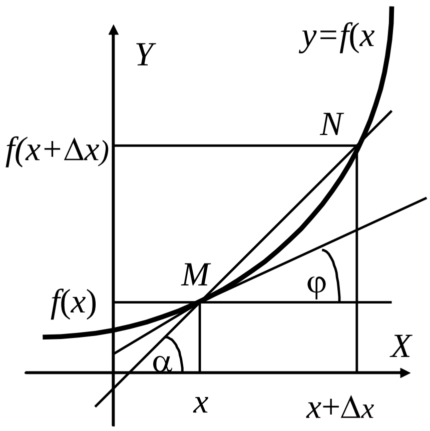
1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные
4. Необходимые вычисления

4.3. Практическая работа 3. Решение задач на нахождение производной

Цель - закрепить навыки вычисления производных элементарных функций.

Пояснения к работе

Определение производной функции



Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки x.

Пусть Δx - приращение (изменение) аргумента в точке x.

Обозначим через $\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ - приращение функции.

Отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ как видно из рисунка, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой $y = f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

Если существует предел отношения $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ в точке $\Delta x = 0$, то он называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается y' или $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется *дифференцированием.*

Если для любого числа x из открытого промежутка (a, b) можно вычислить $f'(x)$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на промежутке (a, b).*

Основные правила вычисления производной.

1. Производная *постоянной* равна нулю, т.е. $c' = 0$.
2. Производная *аргумента* равна 1, т.е. $x' = 1$.
3. Производная *алгебраической суммы* конечного числа дифференцируемых функций равна такой же *сумме производных* этих функций, т.е.

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v' \qquad (1)$$

4. Производная *произведения двух* дифференцируемых функций равна *произведению производной* первого сомножителя на *второй* плюс *произведение первого* сомножителя на *производную второго*, т.е.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad (2)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(cu)' = c \cdot u'$ (3)

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (4)$$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0$,
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$,
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$,
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
5. $(\sin x)' = \cos x$,
6. $(\cos x)' = -\sin x$,
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}, (a \neq 1, a > 0, x > 0)$,
10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
11. $(a^x)' = a^x \ln a$,
12. $(e^x)' = e^x$,
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$,
16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Частные случаи формулы №2: а) $(x)'=1$; б) $(x^2)'=2x$.

Пример. Найдите производную функции:

а) $f(x)=3x^4-\frac{2}{x}-5tgx+2\sin x-2\ln x+71$; б) $g(x)=(3x-6)\sqrt{x}$; в) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

Указания: Используйте основные правила и формулы дифференцирования (таблицу производных):

Решение. а) Здесь следует использовать правило дифференцирования суммы (разности) функций (1) и выносить постоянный коэффициент за знак производной (3).

$f'(x)=(3x^4-\frac{2}{x}-5tgx+2sinx-2lnx+71)'=(3x^4)'-\left(\frac{2}{x}\right)'-(5tgx)'+(2sinx)'-(2lnx)'+(71)'=$

$=3(x^4)'-2\left(\frac{1}{x}\right)'-5(tgx)'+2(sinx)'-2(lnx)'+0=3\cdot 4x^{4-1}-2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-5\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)+2cosx-2\cdot\frac{1}{x}=$

$=12x^3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{\cos^2 x}+2cosx-\frac{2}{x}$.

б) Следует использовать правило дифференцирования произведения функций (2) и таблицу производных.

$g'(x)=(3x-6)'\sqrt{x}+(3x-6)(\sqrt{x})'=(3\cdot 1-0)\cdot\sqrt{x}+(3x-6)\frac{1}{2\sqrt{x}}=3\sqrt{x}+\frac{3x-6}{2\sqrt{x}}$.

в) Используйте правило дифференцирования частного функций (4) и таблицу производных.

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'(x^2-1)-(x^2-1)'\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)-2x\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-1-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}=-\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$$

Геомерическое приложение производной.

Уравнение касательной к кривой y=f(x), проходящей через точку (x_1; y_1) имеет вид

$$\mathbf{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)}$$

Уравнение нормали:

$$y-y_1=-\frac{1}{f'(x)}(x-x_1).$$

Пример

К параболе $y=3x^2-x$ в точке $x_1=-1$ проведены касательная и нормаль. Составить их уравнения.

РЕШЕНИЕ. Ордината точки касания $y(-1)$ составляет $3(-1)^2-(-1)=4$, т. е. координаты точки касания: $(-1; 4)$. Угловой коэффициент $k_{x=-1}$ равен $y'(-1)=(3x^2-x)'_{x=-1}=(6x-1)_{x=-1}=-7$.

Составим уравнение касательной, подставив в (5.21) координаты $(-1; 4)$ и значение $k=-7$:

$$y-4=-7(x+1)\Rightarrow 7x+y+3=0.$$

Составим уравнение нормали, воспользовавшись (5.22):

$$y-4=-\frac{1}{-7}(x+1)\Rightarrow x-7y+29=0.$$

Физические приложения производной.

Пример

Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t_0 = 4$ с.

РЕШЕНИЕ. Скорость движения точки в любой момент времени t:

$$v = \frac{dS}{dt} = 6t^2 + 2t.$$

Тогда скорость движения точки в момент t_0:

$$v(t_0) = 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 2 = 104 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение движения точки в любой момент времени t:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t + 2.$$

Тогда ускорение движения точки в момент времени t_0:

$$a(t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задание и ход работы

Решите задачи по вариантам.

1 вариант

1. Найдите производную функции:

   а) $f(x)=x^7-3x^5+2\sin x-2$; б) $g(x)=(x+5)\sqrt{x}$; в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.;

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=-1$, $x_0=1$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+2t^2+5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

2 вариант

1. Найдите производную функции:

   а) $f(x)=4^x+2x^5+5\cos x-1$; б) $g(x)=x^3(1+x)$; в) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{4+2x}$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=0$, $x_0=2$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=t^3-4t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

3 вариант

1. Найдите производную функции:

   а) $y=\dfrac{1}{x}-6x+x^{10}$; б) $y=(\dfrac{1}{x}+1)(2x-3)$; в) $\varphi(x)=\dfrac{2x}{1-x}$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+1$ в точке с абсциссой $x_0=0$, $x_0=1$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=\dfrac{1}{4}t^4+t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени t=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

4 вариант

1. Найдите производную функции:

   а) f(x) =$2\sqrt{x}-4x^2+\frac{1}{x}+5$; б) f(x) = $(3x^2-2)(2+3x^2)$; в) g(x) = $\frac{5-2x^2}{1-x^3}$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-1$ в точке с абсциссой $x_0=-1$, $x_0=2$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=t^4-2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

5 вариант

1. Найдите производную функции: а) f(x)=$\frac{1}{x}$+4ctgx-x^3; б) y=$(x^2+3)(x^4-1)$; в) f(x)=$\frac{x^2+15}{x+1}$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=tgx$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{4}$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=2t^3-8$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

6 вариант

1. Найдите производную функции:

   а) y=$\frac{1}{3}x^3+x^2$-6tgx; б) y=$(x^2-3x+9)(x+3)$; в) f(x)=$\frac{2x+7}{x^2-4}$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=1+\cos x$ в точке с абсциссой $x_0=0$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

3. Материальная точка движется по закону $x(t)=t^4+2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени *t*=5 с. (Перемещение измеряется в метрах.)

7 вариант

1. Найдите производную функции:

   а) f(x)=$\sqrt{x}-9x^2$-3; б) f(x)=$(x^2+3)(x^6-1)$; в) φ(x)=$\frac{6x}{x+1}$.

2. Составьте уравнение касательной к кривой y=4-x^2 в точке с абсциссой x=1

3. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s=4t^4+2$, где s – путь пройденный телом, t – время. Найти скорость и ускорение тела в момент времени t = 2.

8 вариант

1. Найдите производную функции:

   а) f(x)=$6\sqrt{x}+\frac{3}{x}-x^2$; б) y=$(2x-4)\sqrt{x}$; в) f(x)=$\frac{x^2-12}{x-2}$.

2. Составьте уравнение касательной к кривой y=x^3+2x в точке с абсциссой x=1

3. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s=t^5+2t+3$, где s – путь пройденный телом, t – время. Найти скорость и ускорение тела в момент времени t = 1.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

4.4. Практическая работа 4. Решение задач на нахождение второй производной

Цель - закрепить навыки вычисления второй производной.

Пояснения к работе

Производная второго порядка (вторая производная) от функции y=f(x) есть производная от ее первой производной: $y'' = (f'(x))'$.

Производной n-го порядка называется производная от производной *(n-1)*-го порядка.

Пример Найти производную 2-го порядка функции $f(x)=5x^4-3x^3+2x-2$ в точке x=2.

Решение/ Находим в начале первую производную:

$f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$,

затем вторую от первой производной:

$$(f'(x))' = f''(x) = (20x^3 - 9x^2 + 2)' = 60x^2 - 18x.$$

Вычислим значение 2-й производной в точке x=2:

$$f''(2) = 60\cdot 2^2 - 18\cdot 2 = 240 - 36 = 204.$$

Задание и ход работы

Выполните задания по вариантам.

Вариант 1.

1. Найти производную второго порядка в точке x=0 функции $y = 3x^4 + \cos 5x$
2. Найдите производную второго порядка функции: а) $f(x)=x^7-3x^5+2\sin x-2$; б) $g(x)=(x+5)\sqrt{x}$

Вариант 2.

1. Найти производную второго порядка в точке x=0 функции $y = 2x^5 - \sin 3x$
2. Найдите производную второго порядка функции: а) $f(x)=4^x+2x^5+5\cos x-1$; б) $g(x)=x^3(1+x)$.

Вариант 3.

1. Найти производную второго порядка в точке x=0 функции $y = 4x^3 - e^{5x}$.
2. Найдите производную второго порядка функции: а) $y=\frac{1}{x}-6x+x^{10}$; б) $y=(\frac{1}{x}+1)(2x-3)$.

Вариант 4.

1. Найти производную второго порядка в точке x=0 функции $y = 5x^4 - \cos 4x$
2. Найдите производную второго порядка функции: а) $f(x) = 2\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{x} + 5$;

б) $f(x) = (3x^2-2)(2+3x^2)$.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

4.5. Практическая работа 5 Нахождение неопределенного интеграла

Цель работы: закрепить навыки интегрирования функций; научиться применять основные методы интегрирования (метод замены (подстановки), метод интегрирования по частям)

Пояснения к работе

Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ (интеграл от функции $f(x)$ по dx) называется совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$, стоящая под знаком интеграла, называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)dx$ - *подынтегральным выражением*.

Операция нахождения множества всех первообразных данной функции называется *интегрированием*.

Основные свойства неопределенного интеграла

1° *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2° *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3° *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого:* $\int dF\{x\}=F\{x\}+C$.

4° *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:* $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

5° *Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от этих функций*

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int kdx = kx + C$;

2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C,\ \mu \neq -1;$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)dx = \dfrac{1}{x} + C$;

5) $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$;

8) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

9) $\int e^x dx = e^x + C;;$

10) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

11) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C;$

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

13) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$.

Непосредственное интегрирование

Пример. Вычислить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием:

а) $\int (4x^5 - 8^x)dx$; б) $\int \left(\frac{7}{1+x^2} + 12^x \right) dx$; в) $\int (3x^5 - \frac{5}{x} + 7\cos x + \sqrt[6]{x^5})dx$.

Решение: а) Под знаком интеграла заданы две функции: степенная $4x^5$ (формула 2 при n=5) и показательная 8^x (формула 6 при a=8):

$$\int (4x^5 - 8^x)dx = \int 4x^5 dx - \int 8^x dx = 4 \cdot \frac{x^{5+1}}{5+1} - \frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{2}{3}x^6 - \frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

б) Под знаком интеграла заданы функции: дробно-рациональная $\frac{7}{1+x^2}$ (формула 13 при a=1) и показательная 12^x (формула 8 при a=12):

$$\int \left(\frac{7}{1+x^2} + 12^x \right) dx = \int \frac{7}{1+x^2} dx + \int 12^x dx = 7arctgx + \frac{12^x}{\ln 12} + C.$$

в) Подынтегральное выражение состоит из 4-х функций: степенная $3x^5$ (формула 2 при n=5), дробно-рациональная $\frac{5}{x}$ (формула 3), тригонометрическая 7cosx (формула 6) и иррациональная $\sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{5}{6}}$ (формула 2 при n=$\frac{5}{6}$)

$$\int (3x^5 - \frac{5}{x} + 7\cos x + \sqrt[6]{x^5})dx = \int 3x^5 dx - \int \frac{5}{x} dx + \int 7\cos x dx + \int x^{\frac{5}{6}} dx = 3 \cdot \frac{x^{5+1}}{5+1} - 5 \cdot \ln x + 7(-\sin x) +$$

$$+ \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + C = 3 \cdot \frac{x^6}{6} - 5\ln x - 7\sin x + \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{1}{2}x^6 - 5\ln x - 7\sin x + \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + C.$$

Метод замены переменной

Теорема. Пусть функция $x = u(t)$ непрерывно дифференцируема в некоторой области и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $t = u^{-1}(x)$. Тогда $\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$, где $t = u^{-1}(x)$.

Заметим, что требования к обратной функции нужны, чтобы суметь возвратиться обратно, от переменной t к переменной x.

Пример . Вычислить неопределённый интеграл методом замены переменной:

$$а) \int \sqrt[4]{3x-7} dx = \left| \begin{array}{ll} \textit{Замена}: & 3x-7=t \\ (3x-7)'dx = t'dt & \\ 3dx = dt & \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[4]{t}\, \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{1}{3} \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C =$$

$$= \frac{4}{15}(3x-7)^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}\sqrt[4]{(3x-7)^5} + C.$$

б) $\int \frac{dx}{8x-3} = \left| \begin{array}{c} 8x-3=t \\ (8x-3)'dx = t'dt \\ 8dx = dt \\ dx = \frac{1}{8}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{8}dt}{t} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C = \frac{1}{8}\ln|8x-3| + C.$

в) $\int (4x+3)^5 dx = \left| \begin{array}{l} 4x+3=t \\ (4x+3)'dx = t'dt \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int t^5 \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{24}t^6 + C = \frac{1}{24}(4x+3)^6 + C.$

Метод интегрирования по частям

Пусть u=u(x) и v=v(x) – дифференцируемые функции. Тогда формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла записывается так:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu,$$

если интегралы в обеих частях соотношения существуют.

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int vdu$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл.

Пример Вычислить неопределённый интеграл интегрированием по частям:

а) $\int x \ln x dx$; б) $\int x \cos x dx$; в) $\int 3x \cdot 7^x dx$.

Решение:

а) $\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x, \quad dv = xdx \\ du = u'dx = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C;$

б) $\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \quad dv = \cos x dx \\ du = u'dx = x'dx = dx \\ v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$;

в) $\int 3x \cdot 7^x dx = \left| \begin{array}{c} u = 3x \quad dv = 7^x dx \\ du = u'dx = (3x)'dx = 3dx \\ v = \int dv = \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} \end{array} \right| = 3x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \int \frac{7^x}{\ln 7} \cdot 3dx = 3x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \frac{3}{\ln 7}\int 7^x dx = 3x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} -$

$- \frac{3}{\ln 7}\frac{7^x}{\ln 7} + C = 3\frac{7^x}{\ln 7}\left(x - \frac{1}{\ln 7}\right) + C.$

Задание и ход работы

1. Выполни задания по вариантам
2. Ответить на контрольные вопросы

Вариант 1

Вычислите неопределённый интеграл

1) непосредственным интегрированием $\int \left(x^4 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \right) dx$;

2) методом замены переменной $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x \cdot 3^x dx$.

Вариант 2

Вычислите неопределённый интеграл:

1) непосредственным интегрированием $\int \left(\frac{3}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 3x\sqrt{x} \right) dx$;

2) методом замены переменной $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x \ln x dx$.

Вариант 3

Вычислите неопределённый интеграл:

1) непосредственным интегрированием $\int \left(2x^2 + 3^x + 4e^x \right) dx$;

2) методом замены переменной $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x \cdot 2^x dx$

Вариант 4

Вычислите неопределённый интеграл:

1) непосредственным интегрированием $\int \left(7x^6 - 12x^{11} + 5x - 6\sqrt{x} \right) dx$;

2) методом замены переменной $\int x(x^2+1)^9 dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int 2x^2 \ln x dx$.

Вариант 5

Вычислите неопределённый интеграл

1) непосредственным интегрированием $\int \left(x^2 + x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$;

2) методом замены переменной $\int \frac{dx}{(2+x)^4}$;

3) методом интегрирования по частям $\int x \sin x dx$

Вариант 6

Вычислите неопределённый интеграл:

1) непосредственным интегрированием $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\cos x\right)dx$;

2) методом замены переменной $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$;

3) методом интегрирования по частям $\int x^6 \ln x dx$.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

4.6 Практическая работа 6 Нахождение определенного интеграла

Цель: закрепить навыки вычисления определенного интеграла

Пояснения к работе

При вычислении определённых интегралов используйте ***формулу Ньютона-Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)\text{, где } F(x) \text{ – первообразная функции } f(x).$$

Например, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$.

<u>Свойства определённого интеграла</u>

1°. *Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*, т.е.

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx,$$

где λ - некоторое число.

2°. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3°. *Если поменять местами пределы интегрирования, интеграл поменяет знак:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4°. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всём отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей*, т.е. при любых *a, b, c*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5°. *Если на отрезке* [*a*; *b*], *где a<b,* $f(x) \geq g(x)$, *то* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Следствие. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$ *и функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке. Тогда*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Методы вычисления определенного интеграла

Методы вычисления остаются теми же, что и методы вычисления неопределенного интеграла, но разница есть. В неопределенном интеграле, делая замену переменной, надо затем возвратиться к исходной функции, в определенном интеграле этого делать не нужно, при замене пересчитываются и пределы интегрирования для новой переменной. Определенный интеграл при постоянных пределах интегрирования – число и все равно, в каких переменных считать это число. Но требование взаимной однозначности функции – замены и в определенном интеграле сохраняется, просто оно маскируется условиями теоремы о замены переменной.

Метод замены переменной

Пусть 1) $x = \varphi(t), \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$,

2) значения $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ не выходят за границы $[a,b]$,

3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Пример. Вычислите определённый интеграл методом замены переменной:

а) $\int_0^2 xe^{x^2} dx$; б) $\int_1^3 \sqrt[5]{(3x-2)^3}\,dx$.

Решение: а) $$\int_0^2 xe^{x^2} dx = \left| \begin{array}{c} \text{Замена} \quad x^2 = t \\ (x^2)' dx = t'dt \\ 2xdx = dt, xdx = \frac{1}{2}dt \\ x = 0 \Rightarrow \quad t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow \quad t = 4 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2}e^t \Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

$$б) \int_1^3 \sqrt[5]{(3x-2)^3}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{Замена}: 3x - 2 = t, \\ dx = \frac{1}{3}dt, \\ \text{Если } x = 1, \text{то} \quad t = 1, \\ \text{Если } x = 3, \text{то} \quad t = 7 \end{array} \right| = \int_1^7 \sqrt[5]{t^3}\,\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int_1^7 t^{\frac{3}{5}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} \Bigg|_1^7 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8}(7^{\frac{8}{5}} - 1^{\frac{8}{5}}) =$$

$$= \frac{5}{24}(\sqrt[5]{7^8} - 1).$$

Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v du,$$

где $uv|_b^a = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Пример. Вычислить определённый интеграл методом интегрирования по частям:

а) $\int_1^2 5x^3 \ln x dx$; б) $\int_0^{2\pi} 2x\cos x dx$; в) $\int_0^1 x\cdot e^{6x}dx$; г) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

$$\textit{Решение}:\ \ a) \int_1^2 5x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Пусть}\quad u = \ln x, \quad dv = 5x^3 dx \\ \textit{Тогда}\quad du = u'dx = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int 5x^3 dx = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{5}{4}x^4 \end{array} \right| = \left(\ln x \cdot \frac{5}{4}x^4 \right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{5}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{5}{4}\ln 2\cdot 2^4 - \frac{5}{4}\ln 1\cdot 1^4 - \frac{5}{4}\int_1^2 x^3 dx = \frac{5}{4}\cdot 16\ln 2 - 0 - \frac{5}{4}\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = 20\ln 2 - \frac{5}{16}\left(2^4 - 2^1\right) = 20\ln 2 - \frac{35}{8}.$$

$$б)\ \int_0^{2\pi} 2x\cos x dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Пусть}\quad u = 2x, \quad dv = \cos x dx \\ \textit{Тогда}\quad du = u'dx = (2x)'dx = 2dx \\ v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = 2x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x dx =$$

$$= 4\pi\sin 2\pi - 0 - 2\int_0^{2\pi}\sin x dx = 0 - 2\cdot 0 = 0.$$

$$в)\ \int_0^1 x\cdot e^{6x}dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Пусть}\quad u = x, \quad dv = e^{6x}dx \\ \textit{тогда}\quad du = u'dx = x'dx = dx \\ v = \int dv = \int e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x} \end{array} \right| = x\frac{1}{6}e^{6x}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{6}e^{6x}dx = 1\cdot\frac{1}{6}e^6 - 0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}e^{6x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{36}\left(e^6 - e^0\right) = \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{36}e^6 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}(5e^6 + 1).$$

$$г)\int_0^1 \ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Пусть}\quad u = \ln(x+1), \quad dv = dx \\ \textit{Тогда}\quad du = (\ln(1+x))' = \frac{dx}{1+x} \\ v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right| = \ln(x+1)x\ \Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{x+1} = \ln(1+1)\cdot 1 - \ln(0+1)\cdot 0 -$$

$$- \int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \ln 2 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1})dx = \ln 2 - (x - \ln(x+1))\ \Big|_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2 - 0 + \ln 1) = 2\ln 2 - 1.$$

Задание и ход работы

1. Выполните задания по вариантам

1 вариант

1. Найдите определенный интеграл, используя его свойства:

а) $\int_2^2 (x^2 + 4x)dx$; б) $\int_1^3 \frac{xdx}{7} + \int_3^5 \frac{xdx}{7}$; в) $\int_0^2 (3x - x^3)dx - \int_2^0 (3x - x^3)dx$;

г) $\int_1^2 \left(\frac{x}{3} + x^2\right)dx - \int_1^2 \left(\frac{t}{3} + t^2\right)dt$.

2. Вычислите: а) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{3}} 5\sin 4x dx$; б) $\int_0^{\pi} (x^2 + \sin x)dx$; в) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$.

2 вариант

1. Найдите определенный интеграл, используя его свойства:

а) $\int_3^3 (-x^2 + 3x)dx$; б) $\int_1^3 \frac{x^3dx}{4} - \int_5^3 \frac{x^3dx}{4}$; в) $\int_1^2 \left(\frac{x}{3} + x^2\right)dx - \int_2^1 \left(\frac{x}{3} + x^2\right)dx$;

г) $\int_0^2 (3z - z^3)dz - \int_0^2 (3x - x^3)dx$.

2. Вычислите: а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos 6x dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2x^3 + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$; в) $\int_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$.

3 вариант

1. Найдите определенный интеграл, используя его свойства:

а) $\int_4^4 (x^5 - 6x)dx$; б) $\int_2^3 (3x - x^3)dx - \int_3^2 (3x - x^3)dx$; в) $\int_1^2 \frac{3x^2dx}{7} + \int_2^4 \frac{3x^2dx}{7}$;

г) $\int_1^2 \left(\sin\frac{t}{3} + t^2\right)dt - \int_1^2 \left(\sin\frac{x}{3} + x^2\right)dx$.

2. Вычислите: а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-7\sin 3x)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(3x^2 - \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$; в) $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}dx$.

4 вариант

1. Найдите определенный интеграл, используя его свойства:

а) $\int_5^5 (-2x^7 + 8x)dx$; б) $\int_1^2 \left(\sin\frac{x}{3} + x^2\right)dx + \int_2^1 \left(\sin\frac{x}{3} + x^2\right)dx$; в) $\int_1^2 \frac{5x^3dx}{8} - \int_5^2 \frac{5x^3dx}{8}$;

г) $\int_2^3 (3z - z^3)dz - \int_2^3 (3x - x^3)dx$.

2. Вычислите: а) $\int\limits_0^1 e^{2x-1}dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(5x^4+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$; в) $\int\limits_0^2 5\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx$.

<u>5 вариант</u>

1. Найдите определенный интеграл, используя его свойства:

а) $\int\limits_6^6\left(x^7+9x^3\right)dx$; б) $\int\limits_1^2\left(\frac{x}{3}+\cos x^2\right)dx+\int\limits_2^1\left(\frac{x}{3}+\cos x^2\right)dx$; в) $\int\limits_1^5\frac{x^2dx}{5}+\int\limits_5^6\frac{x^2dx}{5}$;

г) $\int\limits_2^5\left(tg3t-t^3\right)dt-\int\limits_2^5\left(tg3x-x^3\right)dx$.

2. Вычислите: а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{12}}2\sin 6x dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{2}{1+x^2}\right)dx$; в) $\int\limits_0^1\sqrt{1+x}\,dx$.

6 вариант

1. Найдите определенный интеграл, используя его свойства:

а) $\int\limits_7^7\left(x^6-3x^4\right)dx$; б) $\int\limits_5^2\left(tg3x-x^3\right)dx+\int\limits_2^5\left(tg3x-x^3\right)dx$; в) $\int\limits_1^2\frac{3x^3dx}{2}-\int\limits_3^2\frac{3x^3dx}{2}$;

г) $\int\limits_1^2\left(\frac{x}{3}+\cos x^2\right)dx-\int\limits_1^2\left(\frac{t}{3}+\cos t^2\right)dt$.

2. Вычислите: а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}-4\sin\frac{3x}{2}dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\cos^2 x}-5x^3\right)dx$; в) $\int\limits_1^2 3^{2x-1}dx$.

Содержание отчета

1. Название практической работы
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

Литература

Основные источники

1. Башмаков М.И. Математика: учебник: Рекомендовано ФГАУ «ФИРО». — 7-е изд., стер., - М., ОИЦ «Академия», 2020
2. Богомолов Н.В. Математика. – М.: Дрофа, 2006

Дополнительные источники

3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.- изд.: «Академия», 2009
4. Валуце И.И., Математика для техникумов.- изд.: наука,2010
5. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа 10-11.- изд.: «Просвещение» 2008
6. Михеев В.С., Краткий справочник по математике.-изд.: Академия, 2008
7. Рекомендации по математике. Под ред. Городского Я.С.-изд.:АСТ, Астрель, 2008
8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.-М.:Ком.Книга.2009
9. Подольский А.В. Сборник задач по математике.-Изд.: АСТ-Пресс Книга, 2008

Интернет-ресурсы:

10. Сайт министерства образования и науки РФ. – URL: http://mon.gov.ru (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
11. Российский образовательный портал. – URL: http://edu.ru (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
12. Сайт ФГОУ Федеральный институт развития образования. – URL:http://firo.ru (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
13. Математика, высшая математика, алгебра, геометрия, дискретная математика.– URL: http://matembook.chat.ru/ (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
14. Математика on - line. В помощь студенту. Основные математические формулы по алгебре, геометрии, тригонометрии, высшей математике. – URL: http://mathem.h1.ru/ (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.