Министерство образования и науки Республики Марий Эл
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Республики Марий Эл
«Йошкар-Олинский техникум сервисных технологий»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине

ЕН.01 Математика

40.02.01 Право и организация социального обеспечения

2022

РАССМОТРЕННО на заседании ПЦК Общеобразовательных дисциплин и дисциплин направления «Социальная работа» Председатель ПЦК ______/ В.Н. Петрова/ Протокол №7 от «21» 02 2022 г.	УТВЕРЖДАЮ Зам. директора по УР ________/Н.П. Житомирова / «20» 04 2022 г.

Составитель: Житомирова Н.П., преподаватель первой квалификационной категории ГБПОУ Республики Марий Эл «ЙОТСТ»

Рецензенты:

1) Николаева Е.А., преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ Республики Марий Эл «ЙОТСТ»

Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы.

Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы разработаны для студентов учреждений среднего профессионального образования. В них приведены: дорожная карта, методические указания по выполнению, задания для выполнения внеаудиторной самостоятельной работы, план отчета, литература.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Одной из важнейших задач, стоящих перед профессиональной образовательной организацией, является повышение качества подготовки специалистов. Обучающийся профессиональной образовательной организации среднего профессионального образования должен не только получать знания по математике, овладевать навыками и умениями использования этих знаний, но и уметь самостоятельно приобретать необходимую для профессиональной деятельности информацию.

Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы (далее – СР) разработаны в соответствии с рабочей программой по учебной дисциплине ЕН.01 Математика.

Цель данных методических рекомендаций – помочь обучающимся в выполнении самостоятельной работы.

Выполнение самостоятельной работы предполагает изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы по каждой из изучаемых тем, использование других источников информации.

Самостоятельная работа - это метод обучения и самообразования, предпосылка дидактической связи различных методов между собой. В процессе самостоятельной работы студент выступает как активная творческая личность, готовая к будущей профессиональной деятельности. Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умения использовать справочную и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитию исследовательских умений;
- формирования общих компетенций.

В самостоятельной работе формируются следующие

- знания:

З1. Основные понятия и методы математического анализа;

З2. Основные численные методы решения прикладных задач;

- умения:

У1. Решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;

У2. Применять основные методы интегрирования при решении задач;

У3. Применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности;

- общие компетенции:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК9. Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы

Дорожная карта выполнения внеаудиторной самостоятельной работы

	Наименование раздела, темы программы	**Задания по СР**	**Кол-во часов**	**Форма отчета**
1	Раздел 1. Элементы математического анализа Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции	Решение индивидуальных задач по вычислению пределов функций	3	Письменная работа
2	Тема 1.2 Дифференциальное исчисление	Выполнение упражнений по теме «Нахождение производной элементарной функции»	2	Письменная работа
		Выполнение упражнений по теме «Нахождение производной второго порядка и выше»	2	Письменная работа
3		Решение прикладных задач с помощью производной	2	Письменная работа
4	Тема 1.3 Интегральное исчисление	Выполнение упражнений по темам «Вычисление неопределенных интегралов»	2	Письменная работа
		Выполнение упражнений по темам «Вычисление определенных интегралов»	2	Письменная работа
5		Нахождение площадей фигур по индивидуальным заданиям	3	Письменная работа
6	Раздел 2. Элементы линейной алгебры Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений	Выполнение упражнений по теме «Операции над матрицами»	2	Письменная работа
7		Нахождение определителя матрицы	2	Письменная работа
		Выполнение упражнений по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера»	2	Письменная работа
8		Выполнение упражнений по теме «Применение метода Гаусса»	3	Письменная работа
	Итого:		**24**	

Самостоятельная работа №1
Решение индивидуальных задач по вычислению пределов функций

Раздел 1. Элементы математического анализа
Тема 1.1 Предел функции. Непрерывность функции

Цель:
- систематизация знаний по методам вычисления предела функции;
- отработка навыков вычисления пределов функции.
Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, У3, ОК 1, ОК 4, ОК 9
Норма времени: 3 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий.
Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.
Содержание отчета:
1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

Задание:
Выполните задания по индивидуальным вариантам.

Номер задания / Номер варианта	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10
11	1	2	3	4	5	6
12	2	4	6	8	10	2
13	1	3	5	7	9	1
14	1	1	1	2	2	2
15	8	8	9	9	9	10
16	5	6	6	6	7	7
17	10	9	8	7	6	5
18	8	7	6	5	4	3
19	6	5	4	3	2	1
20	4	3	2	1	10	9
21	1	2	1	2	1	2

22	4	3	4	3	4	3
23	5	6	5	6	5	6
24	8	7	8	7	8	7
25	9	10	9	10	9	10

Задание 1

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Задания взять из таблиц 1а и 1б.

Таблица 1а

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$	6	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x^6}{x^3+x^4+x^5}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$	7	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$	8	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{2x^3+3x^2}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	9	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{3x^3+1}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$

Таблица 1б

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$	6	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^4+13x^2-x+10}{x^3+5x^2+13x-12}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$	7	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2-6x^3+2}{8x^3+4x^2+2x^4-7}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{3x^2+2x+4}$	8	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n-6}+2}{n^3+8}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-6n^2}{2n-\sqrt[4]{8n^8+1}}$	9	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x}{x^3-3x^2+1}$	10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x^2-5x+2}{x^3+x^2+2x-1}$

Задание 2

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Задания взять из таблицы 2

Таблица 2

№ nn	Задание	№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+x}{x}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$	7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^4+15x^2}{x^3+5x^2}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{14x^2-5x}{x^3+x^2+2x}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4-5x^3}{x^5+2x^4-10x^3}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+15x^5}{x^3-12x^2}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^6-5x^7+3x^9}{x^4+x^5+2x^6}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^7-5x^8+3x^9}{x^7+x^8+2x^{10}}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^4-4x^3}{x^3+5x^5}$

Задание 3

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Задания взять из таблицы 3

Таблица 3

№ nn	Задание	№ nn	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	6	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$
2	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	7	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$
3	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$	8	$\lim\limits_{x\to -2/3}\frac{3x^2+5x+2}{3x^2+8x+4}$
4	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	9	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x-9}$
5	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$	10	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

Задание 4

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Задания взять из таблицы 4

Таблица 4

№ пп	Задание	№ пп	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
2	$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$
3	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
4	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$	10	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

Задание 5

Вычислить предел функции, используя I замечательный предел и его вариации. Задания взять из таблицы 5.

Таблица 5

№№ пп	Задание	№№ пп	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$	7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos x}{x}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$	10	$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

Задание 6

Вычислить предел функции, используя II замечательный предел. Задания взять из таблицы 6.

Таблица 6

№пп	Задание	№пп	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{10}{x}\right)^{2x}$	6	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{15x}$

2	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{10}{x}}$	7	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{10x}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x}$	8	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$	9	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^{2x}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{4x}$	10	$\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{-\frac{2}{x}}$

Пример выполнения СР

Задание №1 Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2}{5x^5+4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^6+x^4}{7x^5-5x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{6x^3-5}$.

Указания: Разделить все слагаемые числителя и знаменателя на старшую степень, содержащуюся в дроби. При этом, если старшая степень расположена в числителе, предел равен ∞, если в знаменателе, то предел равен нулю; если старшая степень знаменателя равна старшей степени числителя, предел равен отношению коэффициентов при них.

$$\triangle \text{ а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2}{5x^5+4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}}{\frac{5x^5}{x^5}+\frac{4x^2}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{4}{x^3}}=\frac{0+0}{5+0}=0$$

$$\text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{-x^6+x^4}{7x^5-5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^6}{x^6}+\frac{x^4}{x^6}}{\frac{7x^5}{x^6}-\frac{5x^3}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x^2}}{\frac{7}{x}-\frac{5}{x^3}}=\left\{\frac{-1+0}{0-0}\right\}=\infty.$$

$$\text{в) } \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{6x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3}-\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{6-\frac{5}{x^3}}=\frac{1+0}{6-0}=\frac{1}{6}.\blacktriangle$$

Задание 2

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\triangle \lim_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2x-2)}{x^2(5x-4)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{5x-4}=\frac{2\bullet 0-2}{5\bullet 0-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}\blacktriangle$$

Задание 3

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Указания:

1. Выписать квадратный трёхчлен отдельно и приравнять его нулю: $ax^2+bx+c=0$.
2. Найти корни получившегося квадратного уравнения.
3. Разложить квадратный трёхчлен, стоящий под знаком предела, на множители по формуле

$\mathbf{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$, где x_1 и x_2 –корни уравнения.

4. Сократить один из множителей.
5. Вычислить предел.

△ Знаменатель функции, стоящей под знаком предела, представляет из себя квадратный трёхчлен. Разложим его на множители, решив квадратное уравнение:

$x^2-3x+2=0$; $D=(-3)^2+4\cdot1\cdot(-2)=9-8=1$; $x_1=\dfrac{3-\sqrt{1}}{2}=1$; $x_2=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2}=2$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = -1. \blacktriangle$$

Задание 4

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

△ Умножим числитель и знаменатель на сумму корней $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}$, чтобы применить формулу сокращённого умножения $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2+x}\right)^2-\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2+x-2+x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{5\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \frac{2}{5\left(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}. \blacktriangle$$

Задание 5

Вычислить предел функции $\dfrac{2\sin 5x}{8x}$ при $x \to 0$, используя I замечательный предел и его вариации.

Указание: предел вида $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x}$ преобразуют так, чтобы использовать 1-й замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{ax} = a \cdot 1 = a$.

$\triangle$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 5x}{8x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{8x}=\frac{2}{8}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\frac{1}{4}\frac{5}{1}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{4}\cdot 1=\frac{5}{4}=1{,}25$ ▲

Задание 6

Вычислить предел функции, используя II замечательный предел.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{8}{x}}$

Указание: В пределах вида $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{bx}\right)^{x}$ сделать замену $\frac{a}{bx}=\frac{1}{y}$, откуда x=$\frac{a}{b}$y.

$\triangle$ **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{3}y}=\left(\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{\frac{5}{3}}=e^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{e^5}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{8}{x}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{3\cdot 8}=e^{24}$. ▲

Самостоятельная работа №2
Выполнение упражнений по теме
«Нахождение производной элементарной функции»

Тема 1.2 Дифференциальное исчисление

Цель: совершенствование навыков нахождения производной второго порядка и выше.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У1, ОК 5, ОК 9

Норма времени: 2 часа

Рекомендации по выполнению работы:

- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте правила и формулы вычисления производных элементарных и сложных функций.

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

Содержание отчета:

1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные заданий
4. Необходимые вычисления

Задания:

1. Найдите производную функции и вычислите её значение в точке x=1:

а) $y=3x^7+3\ln x-4$; б) $y=\frac{2}{x}-3x+7$;

в) $y=\sqrt[5]{x^2}+6\sin x-3$; г) $y=3\mathrm{tg}x+8x^5+e^x$;

д) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+5^x-2$;   е) $y=2\ln x-7x^3+2e^x$.

2. Найдите производную функции:

а) $y=(2x^3+3x)\cos x$;   б) $y=\frac{4x-2}{\sqrt{x}+x^2}$;

в) $y=(\sin x+2)(\cos x-3)$;   г) $y=\frac{\sin x+\cos x}{2tgx}$;

д) $y=(\sqrt[3]{x^2}-2x)\cdot(e^x-1)$;   е) $y=\frac{3x^2-4x}{\ln x}$.

Пример выполнения СР

Задание 1. Найти производные следующих функций и вычислите их значение в точке $x=1$:

а) $f(x)=3x^4-\frac{2}{x}-5tgx+2\sin x-2\ln x+71$;   б) $y=\sqrt[4]{x^3}+5\ln x-2^x$.

$\triangle$ Здесь следует использовать правило дифференцирования суммы (разности) функций $(u\pm v)'=u'\pm v'$ и выносить постоянный коэффициент за знак производной $(cu)'=c\cdot u'$.

а) $f'(x)=(3x^4-\frac{2}{x}-5tgx+2\sin x-2)'=(3x^4)'-\left(\frac{2}{x}\right)'-(5tgx)'+(2\sin x)'-(2\ln x)'+(71)'=$

$=3(x^4)'-2\left(\frac{1}{x}\right)'-(tgx)'+2(\sin x)'-2(\ln x)'+0=3\cdot4x^{4-1}-2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-5\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)+2\cos x-$

$-2\cdot\frac{1}{x}=12x^3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{\cos^2 x}+2\cos x-\frac{2}{x}$.

$f'(1)=12\cdot1^3+\frac{2}{1^2}-\frac{5}{\cos^2 1}+2\cos1-\frac{2}{1}=12-\frac{5}{\cos^2 1}+2\cos1$.

б) От выражения вида $\sqrt[n]{x^m}$ следует перейти к виду $x^{\frac{m}{n}}$.

$y'=(x^{\frac{3}{4}}+5\ln x-2^x)'=\left(x^{\frac{3}{4}}\right)'+(5\ln x)'-(2^x)'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}+5(\ln x)'-2^x\ln2=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+5\frac{1}{x}-2^x\ln2=$

$=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{5}{x}-2^x\ln2$.

$y'(1)=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{1}}+\dfrac{5}{1}-2^1\ln2=\dfrac{3}{4}+5-2\ln2=5{,}75-2\ln2.$ ▲

Задание 2. Найдите производную функции:

а) $g(x)=(3x-6)\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$; в) $y=(3x^5-4x)\cos x$; г) $y=\dfrac{6x+4}{\sqrt[3]{x^2}+2x^4}$;

д) $y=(10\sqrt[5]{x^4}+3x^2)\cdot(e^x-\ln x)$.

△ а) следует использовать правило дифференцирования произведения функций $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ и таблицу производных. Здесь $u=3x-6$, $v=\sqrt{x}$.

$g'(x)=(3x-6)'\sqrt{x}+(3x-6)(\sqrt{x})'=(3\cdot1-0)\cdot\sqrt{x}+(3x-6)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=3\sqrt{x}+\dfrac{3x-6}{2\sqrt{x}}.$

б) используйте правило дифференцирования частного функций $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ и таблицу производных. Здесь u$=\sqrt{x}$, $v=x^2-1$.

$$y'=\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'(x^2-1)-(x^2-1)'\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)-2x\sqrt{x}}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-4x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}=$$
$$=-\frac{1+3x^2}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$$

в) По формуле $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ имеем при $u=3x^5-4x$; $v=\cos x$

$y'=(3x^5-4x)'\cos x+(3x^5-4x)(\cos x)'=(3\cdot5x^{5-1}-4\cdot1)\cos x+(3x^5-4x)(-\sin x)=(15x^4-4)\cos x-$

$-(3x^5-4x)\sin x.$

г) По формуле $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ имеем при $u=6x+4$; $v=\sqrt[3]{x^2}+2x^4$

$$y' = \frac{(6x+4)'(\sqrt[3]{x^2}+2x^4)-(6x+4)\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)'}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)^2} =$$

$$= \frac{(6\cdot 1+0)\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)-(6x-4)\left(\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+2\cdot 4x^3\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)^2} = \frac{6\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)-(6x-4)\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+8x^3\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)^2} =$$

$$= \frac{6\sqrt[3]{x^2}+12x^4-4\sqrt[3]{x^2}-48x^4+\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}+32x^3}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)^2} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}-36x^4+\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}+32x^3}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2x^4\right)^2}.$$

д) По формуле $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ имеем при $u=10\sqrt[5]{x^4}+3x^2$, $v=e^x-\ln x$

$y'=(10\sqrt[5]{x^4}+3x^2)'\cdot(e^x-\ln x)+(10\sqrt[5]{x^4}+3x^2)\cdot(e^x-\ln x)'=(10\cdot\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}+3\cdot 2x^{2-1})\cdot(e^x-\ln x)+$

$+(10\sqrt[5]{x^4}+3x^2)\cdot(e^x-\frac{1}{x})=(8x^{-\frac{1}{5}}+6x)(e^x-\ln x)+(10\sqrt[5]{x^4}+3x^2)\cdot(e^x-\frac{1}{x})$.▲

Самостоятельная работа №3
Выполнение упражнений по теме
«Нахождение производной второго порядка и выше»

Тема 1.2 Дифференциальное исчисление

Цель: совершенствование навыков нахождения производной второго порядка и выше.
Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У1,ОК 5, ОК 9
Норма времени: 2 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте правила и формулы вычисления производных элементарных и сложных функций.

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.
Содержание отчета:
1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные заданий
4. Необходимые вычисления

Задания:

1. Вычислите производную 2-го порядка функции:

   а) $y = x^5 - 3x^4 - x^3 - 5x^2 + x - 1$ в точке x=0;

   б) $y = e^{\cos x}$; в) $y = \sin 2x$; г) $y = x \ln x$; д) $y = e^x + x^2$.

2. Вычислите производную 3-го порядка функции:

а) $f(x)= -2x^3+4x^2-3x+7$ в точке x= -1; б) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; в) $y = \cos 3x$

3. Дано уравнение прямолинейного движения тела $s = t^4 - 3t^2 + 3$, где s – путь пройденный телом, t – время. Найдите и ускорение тела в момент времени t = 10c.

Пример выполнения СР

Задание 1

Вычислите производную 2-го порядка функции $y = ln sin \frac{x}{4}$:

△ Находим вначале первую производную, затем вторую:

$$y^{/} = (ln sin \frac{x}{4})^{/} = \frac{1}{sin \frac{x}{4}} cos \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} ctg \frac{x}{4};$$

$$y^{//} = (\frac{1}{4} ctg \frac{x}{4})^{-} = -\frac{1}{4 sin^2 \frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{16 sin^2 \frac{x}{4}}. \blacktriangle$$

Задание 2. Найдите производную 3-го порядка функции $f(x)=5x^4–3x^3+2x–2$ в точке x=2.

△ Находим вначале первую производную:

$$f'(x) = 20x^3 – 9x^2 +2,$$

затем вторую от первой производной:

$$(f'(x))' = f''(x)=(20x^3 – 9x^2 +2)'=60x^2 – 18x.$$

Третья производная $f'''(x)=(f''(x))'=(60x^2-18x)'=60\cdot 2x-18=120x-18$.

Вычислим значение 3-й производной в точке x=2:

$f'''(2)=120\cdot 2 – 18=240 -18=222$. ▲

Задание 3. Точка движется прямолинейно по закону $S=2t^3+t^2-4$. Найдите величину ускорения в момент времени t_0=4c.

△ Скорость движения точки в любой момент времени t:

$$v=s'(t) = (2t^3+t^2-4)'=6t^2+2t.$$

Ускорение движения точки в любой момент времени *t*:

$$a = s''(t)= (6t^2+2t)' = 12t+2.$$

Тогда ускорение движения точки в момент времени t_0=4c:

$$a (t_0) = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \text{ (м/с}^2). \blacktriangle$$

Самостоятельная работа №4
Решение прикладных задач с помощью производной

Тема 1.3 Дифференциальное исчисление

Цель:
- закрепить навыки вычисления производной функции и её применения в исследовании функции.
Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У1, ОК 5, ОК 9
Норма времени: 4 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте теоремы о применении первой производной для определения монотонности и нахождения экстремума функции, алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- вспомните физический и геометрический смысл производной и применеит при решении задач на скорость и уравнение касательной.
Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.
Содержание отчета:
1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту задания
4. Необходимые вычисления

Задание:
1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-0{,}5;0{,}5]$.
2. Из квадратного листа жести со стороной 12 м надо изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объема. Найдите размеры бака и его объем.
3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + 7t - 3$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 10с.
4. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

Пример выполнения СР

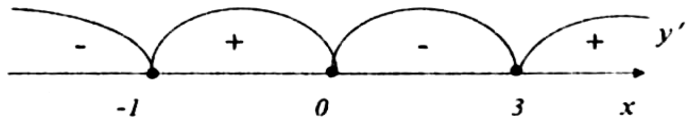
Задание 1 Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на отрезке [-2;4].

Решение

Найдем экстремумы функции, для чего найдем производную функции
$y' = x^3 - 2x^2 - 3x$

и критические точки из условия $y' = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$

Отметим критические точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$, на числовой прямой. Исследуем знак производной в каждом из полученных интервалов:



$y'(-2) < 0$, $y'(-0{,}5) > 0$, $y'(1) < 0$, $y'(4) < 0$.

Таким образом, $y_{min} = y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{17}{12}$

$y_{max} = y(0) = 2$

$y_{min} = y(3) = \frac{1}{4} \cdot 81 + \frac{2}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 + 2 = -11\frac{1}{4}$

Задание 2. Точка движется по закону $s(t)=2t^3-3t$ (s – путь в метрах, t – время в секундах). Вычислите скорость движения точки, ее ускорение в момент времени 2с.

Решение:

$\upsilon(t)=s'(t)$

$\upsilon(t)= (2t^3-3t)'=6t^2-3$

$\upsilon(2)= 6\cdot 2^2-3=21$ м/с

$a(t)=\upsilon'(t)$

$a(t)=(6t^2-3)'=12t$

$a(2)=12\cdot 2=24$м/с^2

Ответ: $\upsilon(2)= 21$ м/с; $a(2)= 24$м/с^2

Задание 3 Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции $y = x^2 - 5x + 4$, если абсцисса точки касания $x_0 = -1$.

Решение.

Найдём ординату точки касания: $y_0 = y(-1) = 1 + 5 + 4 = 10$.

Найдём производную функции: $f'(x) = 2x - 5$

Найдём значение производной в точке касания, то есть угловой коэффициент касательной: $f'(x_0) = -2 - 5 = -7$

Подставляем все полученные данные получаем уравнение касательной:

$$y = 10 - 7(x + 1)$$

Приводим уравнение к общему виду $7x + y - 3 = 0$

Самостоятельная работа №5
Выполнение упражнений по теме
«Вычисление неопределенных интегралов»

Тема 1.3 Интегральное исчисление

Цель: формирование навыка вычисления неопределенных интегралов.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У2, ОК 3
Норма времени: 2 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте формулы интегрирования элементарных функций и основные методы интегрирования (метод замены переменной, по частям).

Справочный материал

Основные свойства неопределенного интеграла

1° *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2° *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3° *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого:*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4° *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

5° *Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от этих функций*

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx .$$

Таблица неопределенных интегралов

Основные формулы интегрирования

1) $\int kdx = kx + C$;

2) $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C,\ \mu \neq -1$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$;

4) $\int \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x} + C$;

5) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$;

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

7) $\int e^x dx = e^x + C$;

8) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

Дополнительные формулы интегрирования:

12) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;

13) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$;

16) $\int \sqrt{x^2 + A}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C$;

17) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$;

18)

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \int \frac{d\left(a^2 \pm x^2\right)}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln \left| a^2 \pm x^2 \right| + C ;$$

19) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$;

20) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$.

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

Содержание отчета:

1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные задания
4. Необходимые вычисления

Задание.

Вычислите неопределенный интеграл:

1. Непосредственным интегрированием:

а) $\int (3x^4 + 5^x)dx$; б) $\int (6\sin x + \sqrt[4]{x^3})dx$; в) $\int \left(\frac{5}{1+x^2} - 9^x \right) dx$; г) $\int (2x\sqrt{x} - 1)dx$

д) $\int (\frac{6}{x^3} + e^x)dx$; е) $\int (\frac{8}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{x})dx$.

2. Заменой переменной:

а) $\int \sqrt[7]{1+4x}dx$; б) $\int (11x-8)^4 dx$; в) $\int \frac{dx}{3x+5}$; г) $\int e^{3x-1}dx$.

3. Интегрированием по частям:

а) $\int 2x\sin xdx$; б) $\int xe^x dx$; в) $\int x \cdot 5^x dx$.

Пример выполнения СР

Задание 1

Вычислить неопределённые интегралы непосредственным интегрированием:

а) $\int (4x^5 - 8^x)dx$; б) $\int (6\sin x + \sqrt[7]{x^3})dx$; в) $\int \left(\frac{7}{1+x^2} + 12^x \right) dx$;

г) $\int \left(3x^2\sqrt{x} + 6\right)dx$; д) $\int (\frac{8}{x^5} - 3e^x)dx$; е) $\int (\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{9}{x})dx$;

ж) $\int (3x^5 - \frac{5}{x} + 7\cos x + \sqrt[6]{x^5})dx$.

$\triangle$ *Указание:* При решении этих примеров следует применить свойство 5° и формулы табличных интегралов. При вычислении интеграла от суммы нескольких функций сумму произвольных постоянных, которая при этом получается, заменяют одной произвольной постоянной, обозначаемой обычно буквой *C*.

а) Под знаком интеграла заданы две функции: степенная $4x^5$ (формула 2 при μ=5) и показательная 8^x (формула 6 при a=8):

$$\int(4x^5-8^x)dx=\int 4x^5dx-\int 8^x dx=4\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1}-\frac{8^x}{\ln 8}+C=\frac{2}{3}x^6-\frac{8^x}{\ln 8}+C.$$

б) Подынтегральное выражение состоит из 2-х функций: тригонометрическая 6sin$x$ (формула 9) и степенная $\sqrt[7]{x^3}=x^{\frac{3}{7}}$ (формула 2 при $\mu=\frac{3}{7}$):

$$\int(6\sin x+\sqrt[7]{x^3})dx=\int 6\sin x dx+\int x^{\frac{3}{7}}dx=-6\cos x+\frac{x^{\frac{3}{7}+1}}{\frac{3}{7}+1}+C=-6\cos x+\frac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}}+C=$$

$$=-6\cos x+\frac{7}{10}\sqrt[7]{x^{10}}+C.$$

в) Под знаком интеграла заданы функции: дробно-рациональная $\frac{7}{1+x^2}$ (формула 12 при a=1) и показательная 12^x (формула 6 при a=12):

$$\int\left(\frac{7}{1+x^2}+12^x\right)dx=\int\frac{7}{1+x^2}dx+\int 12^x dx=7arctgx+\frac{12^x}{\ln 12}+C.$$

г) Под знаком интеграла заданы функции: показательная $3x^2\sqrt{x}=3x^2x^{1/2}=3x^{2+1/2}=3x^{5/2}$ (формула 2 при $\mu=\frac{5}{2}$) и постоянная 6 (формула 1 при k=6):

$$\int\left(3x^2\sqrt{x}+6\right)dx=\int 3x^{\frac{5}{2}}dx+\int 6dx=3\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+6x+C=3\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+6x+C=\frac{6}{7}\sqrt{x^7}+6x+C.$$

д) Под знаком интеграла заданы функции: дробно-рациональная $\frac{8}{x^5}=8x^{-5}$ (формула 2 при μ=-5) и показательная $3e^x$ (формула 7):

$$\int(\frac{8}{x^5}-3e^x)dx=\int 8x^{-5}dx-\int 3e^x dx=8\frac{x^{-5+1}}{-5+1}-3e^x+C=-2x^{-4}-3e^x+C=$$

$$=-\frac{2}{x^4}-3e^x+C.$$

е) Под знаком интеграла заданы функции: $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ (формула 14 при a=1) и дробно-рациональная $\frac{9}{x}$ (формула 3):

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{9}{x}\right)dx=\int\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{9}{x}dx=3\arcsin\ x+9\ln\ x+C.$$

ж) Подынтегральное выражение состоит из 4-х функций: степенная $3x^5$ (формула 2 при μ=5), дробно-рациональная $\frac{5}{x}$ (формула 3), тригонометрическая 7cosx (формула 8) и иррациональная $\sqrt[6]{x^5}=x^{\frac{5}{6}}$ (формула 2 при $\mu=\frac{5}{6}$)

$$\int(3x^5-\frac{5}{x}+7\cos x+\sqrt[6]{x^5})dx=\int 3x^5dx-\int\frac{5}{x}dx+\int 7\cos xdx+\int x^{\frac{5}{6}}dx=3\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1}-5\cdot\ln\ x+$$

$$+7(-\sin\ x)+\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1}+C=3\cdot\frac{x^6}{6}-5\ln\ x-7\sin\ x+\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}}+C=\frac{1}{2}x^6-5\ln\ x-7\sin\ x+$$

$$+\frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+C.$$ ▲

Задание 2

Вычислить неопределённый интеграл методом замены переменной:

$$\triangle\ \text{а)}\int\sqrt[4]{3x-7}dx=\left|\begin{array}{ll}\text{Замена}: & 3x-7=t\\ (3x-7)'dx=t'dt & \\ 3dx=dt & \Rightarrow dx=\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=\int\sqrt[4]{t}\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{15}(3x-7)^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{15}\sqrt[4]{(3x-7)^5}+C.$$

$$\text{б)}\int\frac{dx}{8x-3}=\left|\begin{array}{c}8x-3=t\\ (8x-3)'dx=t'dt\\ 8dx=dt\\ dx=\frac{1}{8}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{8}dt}{t}=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{8}\ln|t|+C=\frac{1}{8}\ln|8x-3|+C.$$

в) $\int (4x+3)^5 dx = \left| \begin{array}{l} 4x+3=t \\ (4x+3)'dx = t'dt \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int t^5 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4}\frac{t^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{24}t^6 + C =$ ▲

Задание 3

Вычислить неопределённый интеграл интегрированием по частям:

а) $\int x \ln x dx$; б) $\int x \cos x dx$; в) $\int 3x \cdot 7^x dx$.

△ Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда формула интегрирования по частям для неопределённого интеграла записывается так: $\int u dv = u \cdot v - \int v du$,

$$a)\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x dx \\ du = u'dx = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C;$$

$$\text{б) } \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos x dx \\ du = u'dx = x'dx = dx \\ v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

$$в)\int 3x \cdot 7^x dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x \quad dv = 7^x dx \\ du = u'dx = (3x)'dx = 3dx \\ v = \int dv = \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} \end{array} \right| = 3x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \int \frac{7^x}{\ln 7} \cdot 3dx = 3x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \frac{3}{\ln 7}\int 7^x dx$$

$$= 3x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \frac{3}{\ln 7}\frac{7^x}{\ln 7} + C = 3\frac{7^x}{\ln 7}\left(x - \frac{1}{\ln 7}\right) + C.$$

▲

Самостоятельная работа №6
Выполнение упражнений по теме
«Вычисление определенных интегралов»

Тема 1.3 Интегральное исчисление

Цель: формирование навыка вычисления определенных интегралов.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У2, ОК 3
Норма времени: 2 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- используйте формулы интегрирования элементарных функций и основные методы интегрирования в определенном интеграле (метод замены переменной, по частям).

Справочный материал

Формула Ньютона – Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Если ввести обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, то *формула Ньютона-Лейбница* перепишется следующим образом

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Например, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$

Методы вычисления определенного интеграла

Метод замены переменной

Пусть 1) $x = \varphi(t), \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$,

2) значения $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ не выходят за границы $[a,b]$,

3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b udv = uv\,|_a^b - \int\limits_a^b vdu\,,$$

где $uv\big|_b^a = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

Содержание отчета:

1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные задания
4. Необходимые вычисления

Задание.

Вычислите определенный интеграл:

1. Вычислите определённый интеграл заменой переменной:

а) $\int\limits_0^1 (-2x+3)^3 dx$; б) $\int\limits_{-4}^3 7\sqrt[4]{(x+5)^3}\,dx$.

2. Вычислите определённый интеграл интегрированием по частям:

а) $\int\limits_1^2 2x^4 \ln x dx$; б) $\int\limits_0^{2\pi} 3x \cos x dx$.

Пример выполнения СР

Задание 1

Вычислите определённый интеграл методом замены переменной: а) $\int\limits_0^2 xe^{x^2} dx$; б) $\int\limits_1^3 \sqrt[5]{(3x-2)^3}\,dx$.

$$\triangle\ \text{а) } \int_0^2 xe^{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \textit{Замена} \quad x^2 = t \\ \left(x^2\right)' dx = t'dt \\ 2xdx = dt, xdx = \frac{1}{2}dt \\ x = 0 \Rightarrow \quad t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow \quad t = 4 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^4 = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right).$$

$$\textit{б)}\int_1^3 \sqrt[5]{(3x-2)^3}\,dx = \left| \begin{array}{l} \textit{Замена}: 3x - 2 = t, \\ dx = \frac{1}{3}dt, \\ \textit{Если } x = 1, \textit{то} \quad t = 1, \\ \textit{Если } x = 3, \textit{то} \quad t = 7 \end{array} \right| = \int_1^7 \sqrt[5]{t^3}\,\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int_1^7 t^{\frac{3}{5}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}\Bigg|_1^7 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}(7^{\frac{8}{5}} - 1^{\frac{8}{5}}) = \frac{5}{24}(\sqrt[5]{7^8} - 1).\ \blacktriangle$$

Задание 2

Вычислить определённый интеграл методом интегрирования по частям:

а) $\int_1^2 5x^3 \ln x dx$; б) $\int_0^{2\pi} 2x\cos x dx$; в) $\int_0^1 x\cdot e^{6x}dx$; г) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

$$\Delta \quad a)\int_1^2 5x^3\ln x dx = \left| \begin{array}{c} \textit{Пусть} \quad u = \ln x, \quad dv = 5x^3dx \\ \textit{Тогда} \quad du = u'dx = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int 5x^3dx = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{5}{4}x^4 \end{array} \right| = \left(\ln x\cdot\frac{5}{4}x^4\right)\Bigg|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 \frac{5}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{5}{4}\ln 2\cdot 2^4 - \frac{5}{4}\ln 1\cdot 1^4 - \frac{5}{4}\int_1^2 x^3dx = \frac{5}{4}\cdot 16\ln 2 - 0 - \frac{5}{4}\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 =$$

$$= 20\ln 2 - \frac{5}{16}\left(2^4 - 2^1\right) = 20\ln 2 - \frac{35}{8}.$$

$$\textit{б)} \quad \int_0^{2\pi} 2x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} \textit{Пусть} \quad u = 2x, \quad dv = \cos x dx \\ \textit{Тогда} \quad du = u'dx = (2x)'dx = 2dx \\ v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = 2x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\sin x dx =$$

$$= 4\pi\sin 2\pi - 0 - 2\int_0^{2\pi}\sin x dx = 0 - 2\cdot 0 = 0.$$

$$в)\quad \int_0^1 x\cdot e^{6x}dx = \left|\begin{matrix} Пусть \quad u = x, \quad dv = e^{6x}dx \\ тогда \quad du = u'dx = x'dx = dx \\ v = \int dv = \int e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x} \end{matrix}\right| = x\frac{1}{6}e^{6x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{6}e^{6x}dx =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{6}e^6 - 0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}e^{6x}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{36}\left(e^6 - e^0\right) = \frac{1}{6}e^6 - \frac{1}{36}e^6 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}(5e^6 + 1).$$

$$г)\int_0^1 \ln(x+1)dx = \left|\begin{matrix} Пусть \quad u = \ln(x+1), \quad dv = dx \\ Тогда \quad du = (\ln(1+x))' = \dfrac{dx}{1+x} \\ v = \int dv = \int dx = x \end{matrix}\right| = \ln(x+1)x\,\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{x+1} =$$

$$= \ln(1+1)\cdot 1 - \ln(0+1)\cdot 0 - -\int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \ln 2 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1})dx =$$

$$= \ln 2 - (x - \ln(x+1))\,\Big|_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2 - 0 + \ln 1) = 2\ln 2 - 1. \blacktriangle$$

Самостоятельная работа №7
Нахождение площадей фигур по индивидуальным заданиям

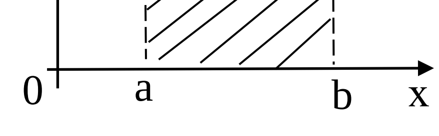
Тема 1.3 Интегральное исчисление

Цель: формирование навыка применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности.
Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З2, У2, ОК 3

Норма времени: 3 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий.

Справочный материал

Если задана непрерывная функция $y = f(x)$ на [a,b], $f(x) > 0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис 1).



$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Пусть криволинейная трапеция с основанием [a,b] ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рис. 2), то из соображений симметрии видим, что

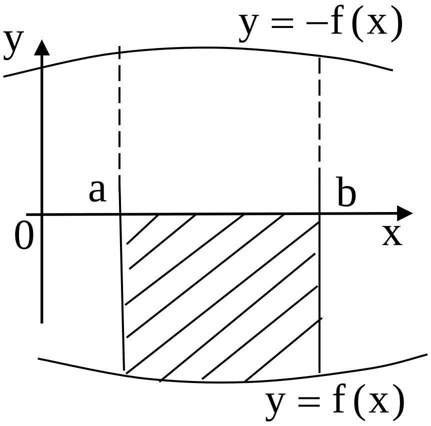


Рис.2

$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (1) или (2) (рис. 3 и 4)

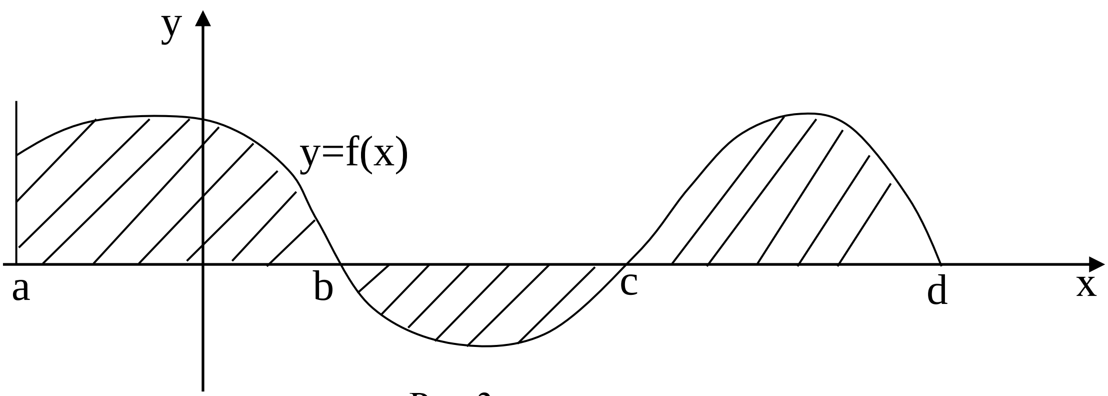
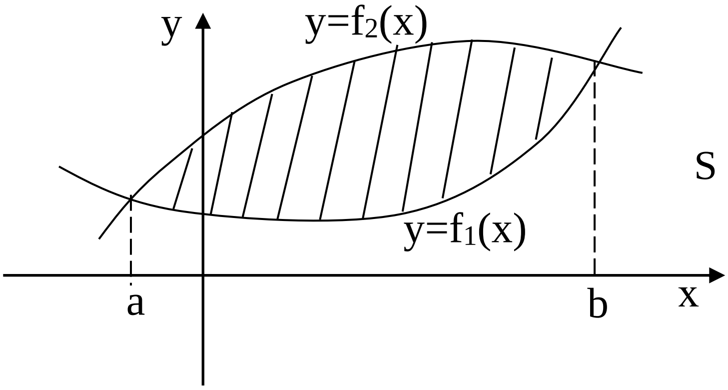


Рис.3

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx \qquad (3)$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (4)$$

Рис.4

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.
Содержание отчета:
1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

Задание:
Выполните задания по индивидуальным вариантам.

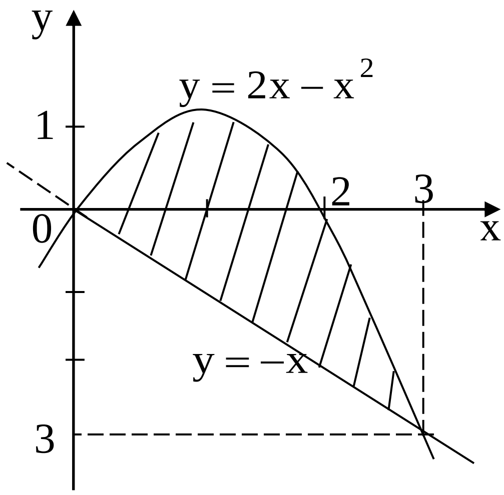
1. а) $y= -x^2+4$, $y=0$; б) $y = x^2;\ y = \frac{x^3}{3}$.
2. а) $y=x^2+2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$; б) $y = x^2;\ y = \sqrt{x}$.
3. а) $y=-x^2-1$, $x=1$, $x=4$, $x=0$; б) $y = 1 + x^2;\ y = x + 3$.
4. а) $y = \sqrt{x};\quad x = 9;\quad y = 0.$; б) $y = x^2 - 1;\ y = 1 - x$
5. а) $y = x^2 + 2x + 2;\quad x = 0;\quad x = -3;\quad y = 0.$
   б) $y = x + 1;\ y = x^2 + 2x + 1.$
6. а) $y = -\frac{1}{x};\quad y = 0;\quad x = -1;\quad x = -2.$ б) $y = x - 1;\ y = x^2 - 2x + 1.$
7. а) $y=3x^2-6x$, $x=4$, $y=0$; б) $y = \ln x;\quad x = e;\quad y = 0.$
8. а) $y=2x^2+3x-9$, $y=0$; б) $y = x^2;\ x + y = 2.$
9. а) $y=x^2+6x+5$, $y=0$; б) $y = x^2 + 1;\ y = 3 - x^2.$
10. а) $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$; б) $y = 2^x;\ y = 1;\quad x = 1.$
11. а) $y=0{,}25x^3$ на отрезке [0; 2], $x=2$, $y=0$; б) $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, *если* $1\le x\le e$.
12. а) $y=x^3-6x^2+11x-6$, $y=0$; б) $y=0{,}5x^2$, $y=x$.
13. а) $y=x-1$, $x=-4$, $x=-2$, $y=0$; б) $x-2y+4=0$, $3x+2y-12=0$, $y=0$.
14. а) $y=-x^2-1$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; б) $y=x^2$, $y=-x^2+2$.
15. а) $y=x^2-6x$, $x=0$; б) $y=x^2$ и прямой $y=2x$.
16. а) $y=4x-x^2$, $x=0$, $x=3$; б) $y=8+2x-x^2$, $y=x+6$.
17. а) $y= -x^2+4x$, $y=0$. б) $y=x^2$, $y=2x^2-1$.
18. а) $y=\sin x$ и $y=0$, если $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$; б) $y=x^3$, $y=8$.
19. а) $y=-x^2+4$, $y=0$; б) $y=-x^2$, .$x+y+2=0$.
20. а) $y=-x^2+9$, $y=0$; б) $y=x^2-4$, $x+y+2=0$.
21. а) $y=x^2$, $y=9$; б) $y=x^2$ $y=3x$.
22. а) $y=0{,}5x^3$, $x=-2$, $x=4$, $y=0$; б) $2x - y^2 = 0,\quad 2x - y - 6 = 0$
23. а) $y=x^2-9$, $y=0$; б) $2x + y^2 = 0,\quad 2x + 5y - 6 = 0.$
24. а) $y=\frac{1}{x}$, $x=5$, $x=10$, $y=0$; б) $2x - y^2 = 0,\quad 2x + y - 6 = 0.$
25. а) $y=e^{-x}$, $x=0$, $x=4$, $y=0$; б) $6x - y^2 = 0,\quad 6x + y - 12 = 0.$

Пример выполнения СР

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$ и $y= -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ или $2 - 2x = 0$, $x = 1$
Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1;\ 1)$ – вершина параболы.
$y = 0$ или $2x - x^2 = 0$ или $x(2 - x) = 0$ $x = 0$; $x = 2$.
$y = -x$ – прямая линия.
Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:
$2x - x^2 = -x$ или $x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.



Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4)

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|^{\&3}_{\&0} =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5\ (кв.ед.).$$

Самостоятельная работа №8
Выполнение упражнений по теме «Операции над матрицами»

Раздел 2. Элементы линейной алгебры
Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.

Цель: формирование навыка выполнения алгебраических операций над прямоугольными матрицами
Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З1, У1, ОК 2, ОК 4, ОК 6
Норма времени: 2 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- воспользуйтесь правилами выполнения операций над матрицами и их свойствами

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.

Содержание отчета:
1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные заданий
4. Необходимые вычисления

Задание:
Вычислите определители, заданные по вариантам.

1. Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Выполните следующие действия: $3(A+2B)'$.

2. Для числа $\lambda=-2$ и матриц $A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

проверьте: а)$AB\neq BA$; б)$A(BC)=(AB)C$; в) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$; г) $(AB)'=B'A'$.

3. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ найдите A^0, A^1, A^3.

Пример выполнения СР

Задание 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Выполните следующие действия: $2(3A-B)'$.

△ Выполняем поочерёдно указанные действия:

$$3A=\begin{pmatrix} 3\cdot(-4) & 3\cdot 2 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 6 & 15 \\ 6 & 3 & -6 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3A-B=\begin{pmatrix} -12 & 6 & 15 \\ 6 & 3 & -6 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 2 & 19 \\ 7 & 2 & -8 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3A-B)'=\begin{pmatrix} -14 & 2 & 19 \\ 7 & 2 & -8 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -14 & 7 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 19 & -8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2(3A-B)'=2\cdot\begin{pmatrix}-14 & 7 & -6\\ 2 & 2 & -2\\ 19 & -8 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28 & 14 & -12\\ 4 & 4 & -4\\ 38 & -16 & 4\end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Задание 2. Найти произведение матриц

$$\Delta\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+0\cdot 1+(-4)\cdot 2 & 1\cdot 4+0\cdot 2+(-4)\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 5+(-4)\cdot 1\\ 2\cdot 3+3\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 4+3\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 0+3\cdot 5+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -4\\ 11 & 15 & 16\end{pmatrix}.$$

$\blacktriangle$

Задание 3 Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ найдите A^3.

$$\triangle\ A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+3\cdot(-1) & 1\cdot 3+3\cdot 2\\ -1\cdot 1+2\cdot(-1) & -1\cdot 3+2\cdot 2\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1+9\cdot(-1) & -2\cdot 3+9\cdot 2\\ -3\cdot 1+1\cdot(-1) & -3\cdot 3+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -4 & -7\end{pmatrix}.\blacktriangle$$

Самостоятельная работа №9
Выполнение упражнений по теме
«Нахождение определителя квадратной матрицы»

Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

Цель: систематизировать знания и отработать навыки вычисления определителя квадратных матриц.

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З1, У1, ОК 2, ОК 4, ОК 6

Норма времени: 3 часа

Рекомендации по выполнению работы:

- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий;
- воспользуйтесь, где уместно, свойствами определеителей:

Свойства определителей

1. Если квадратная матрица A^T является транспонированной матрицей A, то их определители совпадают $|A^T| = |A|$, т.е. определитель не меняется, если заменить его строки столбцами и обратно, например, для определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке 2-х строк или столбцов определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, т.е., например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad \textit{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число λ.

Например, $3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, тогда как $3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$.

Иными словами, общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) определителя можно вынести за знак этого определителя.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, тогда как $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, т.к. его 1-я и 2-я строки пропорциональны с коэффициентом пропорциональности k=2.

7. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. *Определитель произведения матриц.* Если $C = AB$, где A и B – квадратные матрицы (одинакового порядка), то $|C| = |A|\cdot|B|$.

Замечание: Из свойства 8 вытекает, что даже, если AB≠BA, то $|AB| = |BA|$, если A и B – квадратные матрицы одинакового порядка.

9. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Например, $\begin{vmatrix} -1 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$=-1·5·6·3=-90.

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.
Содержание отчета:

1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

Задание:
Вычислите определители, заданные по вариантам.

1 вариант а) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2 вариант а) $\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 14 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

3 вариант а) $\begin{vmatrix} 4 & -11 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

4 вариант а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 12 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

5 вариант а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 32 & 9 & 11 \\ 2 & 10 & 6 \\ 8 & 40 & 24 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

6 вариант а) $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 15 \\ 4 & 1 & 5 \\ 81 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7 вариант а) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 11 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}$.

8 вариант а) $\begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 36 & -5 & 6 \\ 24 & 7 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & -7 & -5 & 1 \end{vmatrix}$.

9 вариант а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 14 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

10 вариант а) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Пример выполнения СР

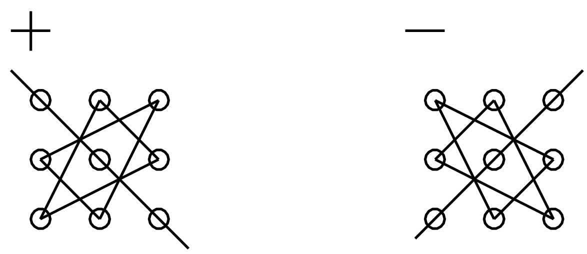
Вычислите определители

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Решение:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$=3·6 – (-2)·4=18 + 8=26.

б) Воспользуемся правилом треугольников



$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1\cdot(-2)\cdot 6 + 4\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 5 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - -4\cdot 0\cdot 6 = 95$$

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=0, т.к. его 1-я и 2-я строки пропорциональны с коэффициентом пропорциональности k=2.

г) Умножая первую строку на –1, прибавим её ко второй и четвёртой строкам определителя. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

Далее умножим первую строку на –3 и сложим её с третьей строкой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель разложим по элементам первого столбца и преобразуем его:

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 10 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

.

Далее опять обращаем в нуль все элементы первого столбца, кроме одного, для чего умножим первую строку на –7 и прибавим ко второй строке, чтобы на месте элемента –7 получить нуль, а затем вычислим определитель второго порядка:

$$\Delta = 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -4\cdot(-27+15) = 48.$$

Самостоятельная работа №10
Выполнение упражнений по теме
«Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера»

Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

Цель: отработать навыки решения системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З1, У1, ОК 2, ОК 4, ОК 6

Норма времени: 3 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий.

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.
Содержание отчета:
1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

Задание:
Методом Крамера найти решение системы линейных уравнений.
Варианты заданий:

1. $\begin{cases} 5x + z = 11; \\ x + 3y - z = 4; \\ -3x + 2y + 10z = 6. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - z = -3; \\ -x + 3y + z = 2; \\ x - y + 4z = 3. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - z = 1; \\ x - 3y + z = 2; \\ x + y + 3z = 4. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 5x + y - z = -5; \\ -x + 3y + z = 5; \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x + y - z = 1; \\ -2x + 4y + z = 5; \\ x + y + 3z = -3. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x + y - z = 6; \\ 2x + 4y + z = 9; \\ x - y + 3z = 4. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x - y = -2; \\ 2x + 5y - 2z = -4; \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x - y + z = 1; \\ 2y - z = 3; \\ -x + y + 5z = -5. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 4x + y - z = 7; \\ 2x + 3y = 7; \\ x - y + 5z = 11. \end{cases}$
10. $\begin{cases} 2x - z = 1; \\ x - 4y + 2z = -5; \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$

Пример выполнения СР

Решить **методом Крамера** систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

△ Определитель системы вычислим по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot(-1) - 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot(-1)=2+2-1-1-1+4=5.$$

Определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получим из определителя Δ путём замены соответственно 1-го, 2-го и 3-го столбцов столбцом свободных членов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot2 + 11\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot1\cdot8 - 1\cdot1\cdot8 - 1\cdot1\cdot3 - (-1)\cdot11\cdot2=20;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 8 & 2\end{vmatrix}=1\cdot11\cdot2 + 2\cdot8\cdot1 + 3\cdot1\cdot1 - 1\cdot11\cdot1 - 1\cdot8\cdot1 - 3\cdot2\cdot2=10;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 1 & 8\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot8 + 2\cdot1\cdot3 + (-1)\cdot11\cdot1 - 3\cdot1\cdot1 - 11\cdot1\cdot1 - 2\cdot(-1)\cdot8=5;$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4, \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2, \qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1.$$

Ответ: $X^т=(4\ \ 2\ \ 1)$. ▲

Самостоятельная работа №11
Выполнение упражнений по теме «Применение метода Гаусса»

Тема 2.1 Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

Цель: отработать навыки решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Формируемые знания, умения и общие компетенции: З1, З1, У1, ОК 2, ОК 4, ОК 6
Норма времени: 3 часа
Рекомендации по выполнению работы:
- повторите материал по предложенной теме работы;
- номер варианта соответствует номеру записи ФИО обучающегося в списке журнала учебных занятий.

Форма отчета: Письменная работа, выполненная в отдельной тетради.
Содержание отчета:
1. Название СР
2. Цель работы
3. Исходные данные по варианту
4. Необходимые вычисления

Задание:

Методом Гаусса найти решение системы линейных уравнений. Варианты заданий:

1. $\begin{cases} 5x + z = 11; \\ x + 3y - z = 4; \\ -3x + 2y + 10z = 6. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - z = -3; \\ -x + 3y + z = 2; \\ x - y + 4z = 3. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - z = 1; \\ x - 3y + z = 2; \\ x + y + 3z = 4. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 5x + y - z = -5; \\ -x + 3y + z = 5; \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x + y - z = 1; \\ -2x + 4y + z = 5; \\ x + y + 3z = -3. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x + y - z = 6; \\ 2x + 4y + z = 9; \\ x - y + 3z = 4. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x - y = -2; \\ 2x + 5y - 2z = -4; \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x - y + z = 1; \\ 2y - z = 3; \\ -x + y + 5z = -5. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 4x + y - z = 7; \\ 2x + 3y = 7; \\ x - y + 5z = 11. \end{cases}$
10. $\begin{cases} 2x - z = 1; \\ x - 4y + 2z = -5; \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$

Пример выполнения СР

Решить систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение: Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к верхнетреугольному виду путём элементарных преобразований над строками (для краткости записи обозначим 1-ю, 2-ю и 3-ю строки соответственно C_1, C_2 и C_3):

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 + (-2)C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 - C_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ C_3 - 2C_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

В ходе элементарных преобразований мы получили равносильную систему: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_3 = 5. \end{cases}$

Из третьего уравнения находим x_3=1.

Из второго уравнения выразим x_2=0+2x_3=2.

Из первого уравнения найдём x_1=3+x_2–x_3=3+2–1=4.

Ответ: (4; 2; 1).

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Башмаков М.И. Математика: учебник: Рекомендовано ФГАУ «ФИРО». — 7-е изд., стер., - М., ОИЦ «Академия», 2020
2. Богомолов Н.В. Математика. – М.: Дрофа, 2006
3. Гончаренко В. Элементы высшей математики: учебник / Гончаренко В., М., Липагина Л., В., Рылов А. А. — Москва: КноРус, 2021. — 363 с. — ISBN 978-5-406-08264-5. — URL: https://book.ru/book/939287 — Текст электронный.
4. Денежкина И. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / Денежкина И., Е., Степанов С., Е., Цыганок И. И. — Москва :КноРус, 2022. — 302 с. — ISBN 978-5-406-09716-8. — URL: https://book.ru/book/943653 — Текст : электронный.
5. Седых И. Дискретная математика : учебное пособие / Седых И., Ю., Гребенщиков Ю., Б. — Москва :КноРус, 2022. — 329 с. — ISBN 978-5-406-09534-8. — URL: https://book.ru/book/943182 — Текст : электронный.

Дополнительные источники

6. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике.- изд.: «Академия», 2009
7. Валуце И.И., Математика для техникумов.- изд.: наука,2010
8. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа 10-11.- изд.: «Просвещение» 2008
9. Михеев В.С., Краткий справочник по математике.-изд.: Академия, 2008
10. Рекомендации по математике. Под ред. Городского Я.С.-изд.:АСТ, Астрель, 2008
11. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.- М.:Ком.Книга.2009
12. Подольский А.В. Сборник задач по математике.-Изд.: АСТ-Пресс Книга, 2008

Интернет-ресурсы:

13. Сайт министерства образования и науки РФ. – URL: http://mon.gov.ru (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
14. Российский образовательный портал. – URL: http://edu.ru (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
15. Сайт ФГОУ Федеральный институт развития образования. – URL:http://firo.ru (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
16. Математика, высшая математика, алгебра, геометрия, дискретная математика.– URL: http://matembook.chat.ru/ (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.
17. Математика on - line. В помощь студенту. Основные математические формулы по алгебре, геометрии, тригонометрии, высшей математике. – URL: http://mathem.h1.ru/ (дата обращения: 15.03.2020). – Текст: электронный.