ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РЕСПУБЛИКИ МАРИЙ ЭЛ «КОЛЛЕДЖ ИНДУСТРИИ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА»

СОГЛАСОВАНО
Председатель ЦМК
В.В.Грачева
01сентября 2021г.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по УР
Е.Д.Васюкова
01сентября 2021г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических работ
по дисциплине **ЕН.01 МАТЕМАТИКА**
специальность 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»
по очной форме обучения

Козьмодемьянск 2021

Методические указания по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Математика разработаны для студентов специальности 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Разработчик: Грачева Валентина Вячеславовна, преподаватель физики и математики Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Республики Марий Эл «Колледж индустрии и предпринимательства»

Рекомендована цикловой методической комиссией преподавателей ООД и дисциплин цикла ОГСЭ и ЕН Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Республики Марий Эл «Колледж индустрии и предпринимательства

Пояснительная записка

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и оформления отчета, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/п	Тема практических занятий
1.	Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретациякомплексного числа
2.	Действия над матрицами
3.	Определители второго и третьего порядка
4.	Метод Гаусса(метод исключения неизвестных)
5.	Формулы Крамера (для систем линейных уравнений с тремя неизвестными)
6.	Решение матричных уравнений
7.	Графический метод решения задачи линейного программирования
8.	Экстремум функции нескольких переменных
9.	Нахождение переменного интеграла с помощью таблиц, а также используя его свойства
10.	Методы замены переменной и интегрирования по частям
11.	Интегрирование простейших рациональных дробей
12.	Правила замены переменной и интегрирования по частям
13.	Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости (расходимости) интегралов
14.	Приложения интегрального исчисления
15.	Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени
16.	Уравнения с разделяющимися переменными
17.	Однородное дифференциальное уравнение

Практическое занятие № 1

Тема:Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Цель занятия:1) Формирование общих и профессиональных компетенций:

Оснащение: методические указания по выполнению практического занятия.

Литература: 1.Математика: учебник для прикладного бакалавриата / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 396с..

2.Практические занятия по математике: учеб.пособие для бакалавров / Н.В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 495с.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 8 Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

2)Развивать и закреплять знания учащихся производить различные арифметические действия с комплексными числами в различной форме.

Теоретическая часть:

Комплексное число – это выражение вида

$z = x + iy$, (1.1)

где x, y – вещественные числа, а $i^2 = -1$ – мнимая единица. Первое из вещественных чисел, x, называется вещественной (действительной) частью комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, y, - мнимой частью ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют алгебраической формой записи комплексного числа.

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

Числом, сопряженным к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Справедливы следующие правила арифметических действий над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2\neq 0+i0=0$).

Пример 2. Вычислить $z=\dfrac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z=\frac{2-7i}{3+4i}=\frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2}=\frac{6-29i-28}{9+16}=\frac{-22-29i}{25}=-\frac{22}{25}-\frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re}z=-\dfrac{22}{25}$, $\operatorname{Im}z=-\dfrac{29}{25}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку M(x;y) на декартовой плоскости (при этом на оси OX располагаются вещественные числа $z=x+i0=x$, а на оси OY – чисто мнимые числа $z=0+iy=iy$). Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки M), т.е. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi=\operatorname{Arg}z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0\le\varphi<2\pi$. При этом выражение вида

$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (1.2)

называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Содержание практической работы

Задание 1. Найдите z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\bullet z_2$, $\dfrac{z^1}{z^2}$, если

1) $z_1= 5-2i$	$z_2= -4+i$	2) $z_1= -3+I$	$z_2= 2-2i$
3) $z_1= 1-5i$	$z_2= -2+i$	4) $z_1= -4+2i$	$z_2= 1-3i$
5) $z_1= 5-3i$	$z_2= -4+2i$	6) $z_1= -1+4i$	$z_2= 2-i$

Задание 2. Найдите z^4; $\sqrt[3]{z}$; если

1) $z = -1+\sqrt{3}\bullet i$ 2) $z = 2-2i$ 3) $z = -2+2\sqrt{3}\bullet i$ 4) $z = 1-\sqrt{3}\bullet i$

5) $z = 2-2\sqrt{3}\bullet i$ 6) $z = -2+2i$

Задание 3. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

1) а) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\bullet\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ б) $z = 2\bullet e^{п\backslash 2\bullet i}$

2) а) $z = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\bullet\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ б) $z = 3\bullet e^{-п\bullet i}$

3) а) $z = 2\bullet\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-i\bullet\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ б) $z = 5\bullet e^{п\backslash 3\bullet i}$

4) а) $z = 8\bullet\cos\left(2\dfrac{\pi}{3}+i\bullet\sin 2\dfrac{\pi}{3}\right)$ б) $z = 2\bullet e^{-п\backslash 6\, i}$

5) а) $z = 2\bullet\cos\left(3\dfrac{\pi}{4}+i\bullet\sin 3\dfrac{\pi}{4}\right)$ б) $z = 4\bullet e^{-п\backslash 3\, i}$

6) а) $z = 3(\cos 3\frac{\pi}{2} - i \bullet \sin 3\frac{\pi}{2})$ б) $z = 6 \bullet e^{п\backslash 4 \bullet i}$

Практическое занятие № 2

Тема:Действия над матрицами.

Цель занятия: Развивать и закрепить практические навыки учащихся по вычислению действий над матрицами и вычислению определителей

Оснащение: методические указания по выполнению практического занятия.

Литература: **1.**Математика: учебник для прикладного бакалавриата / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 396с..
2.Практические занятия по математике: учеб.пособие для бакалавров / Н.В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 495с.

Содержание теоретической части.

Определение 1. Матрицей размера 2 х 2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов. Обозначается

Числа, составляющие $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца, в которых стоит данное число.

Определение 2. *Определителем (или детерминантом) второго порядка,* соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}называются элементами определителя.

Определение 3. Аналогично, если

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$- квадратная матрица размера 3 х 3

(3 строки, 3 столбца), то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Примеры. 1.Вычислить определители второго порядка:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix}$, 3)$\Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$

2.Вычислить определители третьего порядка:

$$1)\ \Delta=\begin{vmatrix}-1 & 3\kappa_1 & 2\\ 2 & 8 & \kappa_2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix},\quad 2)\ \Delta=\begin{vmatrix}3\kappa_2 & 4 & -5\\ 8 & 7\kappa_2-2 & -2\\ 2 & -1 & 8\end{vmatrix},\quad 3)\ \Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & \kappa_1\cdot\kappa_2\\ 3 & \kappa_1 & -5\\ 2 & \kappa_2 & 5\end{vmatrix}$$

Содержание практической работы.

Зад 1. Вычислить определитель А:

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

1) Разложением по элементам третьей строки;
2) Разложить по элементам первого столбца.

Таблица 1

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	1	-2	3	4	2	-3	5	2	1
2	2	-1	2	-3	4	-1	2	3	-2
3	3	1	-2	-4	1	-3	5	1	2
4	5	1	-1	-2	0	4	2	1	2
5	4	-1	1	1	2	1	-2	0	2
6	-2	1	-1	3	2	-1	2	0	1

Зад 2. Найти произведение матриц АхВ:

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\\ m_3 & n_3\end{pmatrix}$$

Таблица 2

Вариант	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	m_1	n_1	m_2	n_2	m_3	n_3
1	5	4	-2	-3	1	-4	2	-6	1	0	5	-2
2	2	-2	1	4	-2	5	0	6	3	-2	-4	1
3	4	-2	3	0	1	-3	4	-5	2	1	3	-2
4	2	-1	4	2	0	5	-4	3	-2	4	2	1
5	-3	1	2	-4	2	0	-1	3	2	-2	1	-1
6	-2	1	2	3	-1	3	-2	0	1	-1	3	2

Зад 3. Найти матрицу обратной матрице A

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Данные смотрите в **таблице 1.**

Контрольные вопросы

1. Дать определение матрицы
2. Понятие квадратной и единичной матрицы
3. Правило сложения и умножения матриц
4. Алгоритм нахождения обратно матрицы
5. **5.** Вычисление определителя разложением по строке и по столбцу