ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
РЕСПУБЛИКИ МАРИЙ ЭЛ
«КОЛЛЕДЖ ИНДУСТРИИ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА»

СОГЛАСОВАНО
Председатель ЦМК
В.В.Грачева
01сентября 2021г.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по УР
Е.Д.Васюкова
01сентября 2021г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению лабораторных работ и практических занятий
по дисциплине ЕН.01Элементы высшей математики
специальность 09.02.07 «Информационные системы и программирование»

по программе базовой подготовки.

Козьмодемьянск 2021

Методические указания по выполнению и практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики разработаны для студентов специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

Разработчик: Грачева Валентина Вячеславовна, преподаватель физики и математики Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Республики Марий Эл «Колледж индустрии и предпринимательства»

Рекомендована цикловой методической комиссией преподавателей ООД и дисциплин цикла ОГСЭ и ЕН Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Республики Марий Эл «Колледж индустрии и предпринимательства»

Пояснительная записка

Лабораторные работы служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к лабораторной работе.

Лабораторные работы разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/п	Тема практических занятий
1.	Выполнение действий над комплексными числами
2.	Вычисление пределов в точке и на бесконечности
3.	Замечательные пределы
4.	Исследование характера точек разрыва. Нахождение асимптот
5.	Дифференцирование сложной функции
6.	Исследование функции. Построение графиков
7.	Интегрирование методом замены переменнойИнтегрирование по частям
8.	Приложения определённого интеграла
9.	Нахождение частных производных и дифференциалов функции нескольких действительных переменных
10.	Нахождение экстремумов функции нескольких действительных переменных
11.	Нахождение двойных интегралов в прямоугольной и полярной системах координат
12.	Исследование числовых рядов на сходимость
13.	Нахождение промежутка сходимости
14.	Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена
15.	Применение степенных рядов к вычислениям значений функций и определённых интегралов
16.	Решение однородных и линейных дифференциальных уравнений
17.	Действия над матрицами. Вычисление определителей различными методами
18.	Нахождение обратной матрицы
19.	Решение систем линейных уравнений методом Гауса и методом Крамера
20.	Решение систем линейных уравнений методом определителей
21.	Действия над матрицами. Вычисление определителей различными

	методами
22.	Решение систем линейных уравнений
23.	Действия над векторами в пространстве, их приложение
24.	Решение задач на составление уравнения прямой
25.	. Решение задач на составление кривых второго порядка.
26.	Решение задач на составление уравнений плоскости

Практическое занятие № 1

Тема:Выполнение действий над комплексными числами.

Цель занятия:1) Формирование общих и профессиональных компетенций:

Оснащение: методические указания по выполнению практического занятия.

Литература: 1.Математика: учебник для прикладного бакалавриата / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. - 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 396с..

2.Практические занятия по математике: учеб.пособие для бакалавров / Н.В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 495с.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 8 Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

2)Развивать и закреплять знания учащихся производить различные арифметические действия с комплексными числами в различной форме.

Теоретическая часть:

Комплексное число – это выражение вида

$z = x + iy$, (1.1)

где x, y – вещественные числа, а $i^2 = -1$ – мнимая единица. Первое из вещественных чисел, x, называется вещественной (действительной) частью комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, y, - мнимой частью ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют алгебраической формой записи комплексного числа.

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

Числом, сопряженным к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}$$, т.е. $x_1 = 3 + 3i$; $x_2 = 3 - 3i$.

Справедливы следующие правила арифметических действий над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z_2}}{z_2\bar{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

Пример 2. Вычислить $z = \dfrac{2 - 7i}{3 + 4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i;$$

поэтому $\operatorname{Re} z = -\frac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{29}{25}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку M(x;y) на декартовой плоскости (при этом на оси OX располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси OY – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$). Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки M), т.е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi = \operatorname{Arg} z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом выражение вида

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (1.2)

называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Содержание практической работы

Задание 1. Найдите z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \bullet z_2$, $\frac{z^1}{z^2}$, если

1) $z_1 = 5 - 2i$	$z_2 = -4 + i$	2) $z_1 = -3 + I$	$z_2 = 2 - 2i$
3) $z_1 = 1 - 5i$	$z_2 = -2 + i$	4) $z_1 = -4 + 2i$	$z_2 = 1 - 3i$
5) $z_1 = 5 - 3i$	$z_2 = -4 + 2i$	6) $z_1 = -1 + 4i$	$z_2 = 2 - i$

Задание 2. Найдите z^4; $\sqrt[3]{z}$; если

1) $z = -1 + \sqrt{3} \bullet i$ 2) $z = 2 - 2i$ 3) $z = -2 + 2\sqrt{3} \bullet i$ 4) $z = 1 - \sqrt{3} \bullet i$

5) $z = 2 - 2\sqrt{3} \bullet i$ 6) $z = -2 + 2i$

Задание 3. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

1) а) $z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{3} + i \bullet \sin\frac{\pi}{3})$ б) $z = 2 \bullet e^{п\backslash 2 \bullet i}$

2) а) $z = \sqrt{3}\,(\cos\frac{\pi}{6} + i \bullet \sin\frac{\pi}{6})$ б) $z = 3 \bullet e^{-п \bullet i}$

3) а) $z = 2 \bullet \cos(\frac{\pi}{4} - i \bullet \sin\frac{\pi}{4})$ б) $z = 5 \bullet e^{п\backslash 3 \bullet i}$

4) а) $z = 8 \bullet \cos(2\frac{\pi}{3} + i \bullet \sin 2\frac{\pi}{3})$ б) $z = 2 \bullet e^{-п\backslash 6\, i}$

5) а) $z = 2 \bullet \cos(3\frac{\pi}{4} + i \bullet \sin 3\frac{\pi}{4})$ б) $z = 4 \bullet e^{-п\backslash 3\, i}$

6) а) $z = 3(\cos 3\frac{\pi}{2} - i \bullet \sin 3\frac{\pi}{2})$ б) $z = 6 \bullet e^{п\backslash 4 \bullet i}$

Практическое занятие № 1

Тема: «Предел функции в точке и на бесконечности»

Цель: формирование умений вычислять пределы последовательностей и функций, раскрывать в простейших случаях неопределенности.

Методические рекомендации для выполнения практической работы по теме: Пределы числовых последовательностей

Последовательности. Рассмотрим ряд натуральных чисел:

$1, 2, 3, \ldots, n-1, n, \ldots$.

Если заменить каждое натуральное число n в этом ряду некоторым числом u_n, следуя некоторому закону, то мы получим новый ряд чисел:

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots,$ кратко обозначаемый $\{u_n\}$

и называемый*числовой последовательностью*. Величина u_nназывается *общим членом* последовательности.Обычно числовая последовательностьзадаётся некоторой формулой $u_n = f(n)$,позволяющейнайти любой член последовательности по его номеру n ;эта формула называется *формулой* *общегочлена.* Заметим,что задатьчисловуюпоследовательностьформулой общего члена не всегда возможно; иногда последовательность задаётся путём описания её членов (см. ниже последний пример).

П р и м е р ы числовых последовательностей:

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел ;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, … – числовая последовательность приближённых значений $\sqrt{2}$. с увеличивающейся точностью.

В последнем примере невозможно дать формулу общего члена последовательности, тем не менее эта последовательность описана полностью.

Предел числовой последовательности. Рассмотрим числовую последовательность,общийчлен которойприближается кнекоторому числу *a* приувеличении порядкового номера *n*.В этом случае говорят,чточисловая последовательность имеет*предел*.Этопонятиеимеетболеестрогоеопределение.

Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

Это определение означает, что a есть *предел* числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к a при возрастании n. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N, что начиная с $n>N$ *все* члены последовательности расположены внутри интервала ($a - \varepsilon$,$a + \varepsilon$).

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; в противном случае – *расходящейся*.

Последовательность называется *ограниченной*, если существует такое число M, что $|u_n| \le M$ для всех n .

Возрастающая или убывающая последовательность называется *монотонной*.

Теорема Вейерштрасса.*Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел* (эта теорема даётся в средней школе без доказательства).

Основные свойства пределов. Нижеприведенные свойства пределов справедливы не только для числовых последовательностей, но и для функций.

Если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – две сходящиеся последовательности, то:

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot u_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} u_n, \quad (c\text{ - число});$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n / v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n / \lim_{n\to\infty} v_n, \text{ если } \lim_{n\to\infty} v_n \ne 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \le \lim_{n\to\infty} v_n, \text{ если } u_n \le v_n.$$

Если членыпоследовательностей$\{u_n\}$, $\{v_n\}$,$\{w_n\}$удовлетворяют неравенствам

$$u_n \le v_n \le w_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = a, \text{ то } \lim_{n\to\infty} v_n = a.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \ (e - \text{иррациональное число} \approx 2.7183\ldots);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \text{ здесь } a > 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ здесь } a > 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan 1/n}{1/n} = 1.$$

Предел функции. Некоторые замечательные пределы.

Бесконечно малая и бесконечно большая величины.

Конечный предел. Бесконечный предел.

Понятие бесконечности.

Предел функции. *ЧислоL называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число$\delta = \delta(\varepsilon)$, зависящее от ε, чтоиз условия $|x - a| < \delta$следует $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Это определение означает, что L есть *предел* функции $y = f(x)$, если значение функции неограниченно приближается к L , когда значение аргумента x приближается к a. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число δ, что если x находится в интервале ($a - \delta$, $a + \delta$), то значение функции лежит в интервале ($L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$). Отметим, что в соответствии с этим определением аргумент функции лишь приближается к a, не принимая этого значения! Это следует учитывать при вычислении предела любой функции в точке её разрыва, где функция не существует.

П р и м е р . Найти

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Р е ш е н и е . Подставляя $x = 3$ в выражение $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ получим неимеющеесмысла выражение $\frac{0}{0}$.
Поэтому решим по-другому:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 3)}{\cancel{x - 3}} = x + 3.$$

Сокращение дроби в данном случае корректно, так как $x \neq 3$, он лишь приближается к 3. Теперь мы имеем:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6,$$

поскольку, если x стремится к 3, то $x + 3$ стремится к 6 .

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Замечательные пределы

Бесконечно малая и бесконечно большая величины. Если предел некоторой переменной равен 0, то эта переменная называется *бесконечно малой*.

П р и м е р . Функция $y = \sqrt{x + 5} - 3$ является бесконечно малой при x, стремящемся к 4, так как $\lim_{x \to 4} \sqrt{x + 5} - 3 = 0$.

Если абсолютное значение некоторой переменной неограниченно возрастает, то эта переменная называется *бесконечно большой*.

П р и м е р . Функция $\frac{x + 1}{x - 3}$ является бесконечно большой при x, стремящемся к 3.

Бесконечно большая величина не имеет *конечного* предела, но она имеет так называемый *бесконечный* предел, что записывается как:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x + 1}{x - 3} = \infty.$$

Символ ∞ (“бесконечность”)неозначаетнекоторогочисла,онозначаеттолько, чтодробьнеограниченно возрастает при x, стремящемся к3.Следуетотметить,чтодробьможетбытькакположительной(при $x>3$),такиотрицательной(при $x< 3$). Если бесконечно большая величина может быть только положительной при любых значениях x, это отражается в записи. Например, при $x \to 0$ функция $y = x^{-2}$бесконечно большая,ноонаположительна как при $x> 0$, так и при $x< 0$; это выражается так:

$$\lim_{x \to 0} x^{-2} = +\infty.$$

Наоборот, функция $y = -x^{-2}$ всегда отрицательна, поэтому

$$\lim_{x \to 0} (-x^{-2}) = -\infty.$$

В соответствии с этим, результат в нашем примере можно записать так:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x + 1}{x - 3} = \pm\infty.$$

П р и м е р . Запись $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ означает, что если x бесконечно большая величина, то дробь стремится к 1, т.е. её предел равен 1.

Вариант 1.

1.Найдите пределы последовательностей:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{n^4}$; 3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^n$;
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n+2}{n+2}$; 4) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{7}{8n}\right)^n$.

2.Найдите пределы функций:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \left(5x^2 - 4\right)$;
2. $\lim\limits_{x \to -1} \left(7x^3 - 8x^2 - 1\right)$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x-4}{2}$;
4. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right)$;
5. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x^2+x+1}$.

3. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Найдите пределы:

1. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2-16}{x+4}$; 3) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4-x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 15x}{x}$.

4. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+5x-1}{2x^2-7x+3}$; 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^8-x^7}{x^5-x^4}$.