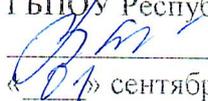


Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
Республики Марий Эл «Колледж индустрии и предпринимательства»

УТВЕРЖДАЮ:

Зам. директора по УВР

ГБПОУ Республики Марий Эл «КИИП»

 Е.Д. Васюкова

«01» сентября 2021 г.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

для студентов, обучающихся по специальности 08.02.01 Строительство и  
эксплуатация зданий и сооружений

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 Математика предназначены для организации деятельности студентов по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Организация-разработчик: Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Республики Марий Эл «Колледж индустрии и предпринимательства»

Разработчик:

Никифорова Эльвира Лазаревна, преподаватель математики и физики Государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Республики Марий Эл «Колледж индустрии и предпринимательства»

Методические рекомендации рассмотрены на заседании цикловой методической комиссией общеобразовательных дисциплин и дисциплин цикла ОГСЭ и ЕН

Протокол № 1 от « 31 » августа 2021 г.

Председатель методической комиссии  /В.В. Грачева/  
*подпись      инициалы и фамилия*

## Методические указания

Практические занятия по дисциплине ЕН.01 МАТЕМАТИКА необходимы для закрепления знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических умений. Практические задания выполняются студентом с применением знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. Практические задания разработаны в соответствии с программой учебной дисциплины. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в письменном виде отчета, в котором представлены выполненные задания.

1. Практикум по решению задач №1 Действия над комплексными числами
2. Практикум по решению задач №2 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
3. Практикум по решению задач №3 Правила дифференцирования.
4. Практикум по решению задач №4 Правила дифференцирования.
5. Практикум по решению задач №5 .Неопределенный интеграл и его свойства. Нахождение неопределенного интеграла методами непосредственного интегрирования, подстановки и интегрирования по частям.
6. Практикум по решению задач №6 Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл. Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница, методами подстановки и интегрирования по частям.
7. Практикум по решению задач №7 Приложения определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.
8. Практикум по решению задач №8. Решение дифференциальных уравнений.
9. Практикум по решению задач №9 Исследование на сходимость рядов с положительными членами по признаку Даламбера и знакопеременных рядов по признаку Лейбница.
10. Практикум по решению задач №10 Операции над событиями

11. Практикум по решению задач №11 Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины.

12. Практикум по решению задач №12. Абсолютная и относительная погрешности приближенного числа. Учет погрешностей и правила действий с приближенными числами.

Критерии оценок

**Оценка «5» ставится, если:**

- работа выполнена полностью;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

**Оценка «4» ставится, если:**

- выполнено больше 75% заданий;
- либо работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны;
- допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являются специальным объектом проверки).

**Отметка «3» ставится, если:**

- выполнено более 50% заданий;
- допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент владеет обязательными умениями по проверяемой теме.

**Отметка «2» ставится, если:**

- выполнено менее 50% заданий;
- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Практическая работа №7

Задание: рассмотрите решенные примеры №1, 2, 4, 5. Решите задания №3 и №6

**Кроме нахождения площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла важнейшим приложением темы является вычисление объема тела вращения.**

Представьте некоторую плоскую фигуру на координатной плоскости. данную фигуру можно ещё и вращать, причем вращать двумя способами:

- вокруг оси абсцисс  $OX$ ;
- вокруг оси ординат  $OY$ .

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

если вращение криволинейной трапеции вокруг оси  $OX$ .

$$V = \pi \int_a^b [\phi(y)]^2 dy$$

, если вращение криволинейной трапеции вокруг оси  $OY$ .

**Вычисление объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси  $OX$**

Пример 1

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $OX$ .

**Решение:** Как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры. То есть, на плоскости  $XOY$  необходимо построить фигуру, ограниченную линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ , уравнение  $y = 0$  задаёт ось  $OX$ .  
Рисунок 1

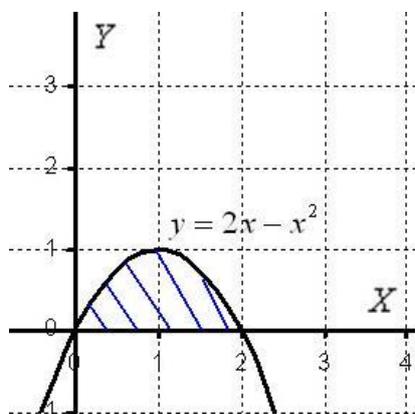


Рисунок 1

Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси  $OX$ . В результате вращения получается летающая тарелка, которая симметрична относительно оси  $OX$ .

Плоская фигура ограничена графиком параболы  $f(x) = 2x - x^2$  сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси  $OX$ . Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат:  $f^2(x)$ , таким образом интеграл всегда неотрицателен, что весьма логично.

Вычислить объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ = \pi \cdot \left( \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

**Ответ:**  $V = \frac{16\pi}{15} \text{ ед}^3 \approx 3,35 \text{ ед}^3$ .

### Пример 2

Найти объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  $x^2 + y^2 = 64$ ,  $y = -5$ ,  $y = 5$ ,  $x = 0$ .

Решение.

$$V = \pi \int_{-5}^5 (64 - y^2) dy = \pi \left( 64y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-5}^5 = 556 \frac{2}{3} \pi \approx 1163 \text{ см}^3$$

### Пример 3

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $2x - y - 2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$

### Пример 4

Найти объем тела, получаемого вращением параболической трапеции, вокруг оси абсцисс

$$y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0.$$

Решение .

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi \text{ (куб.ед)}$$

Пример 5. Вычислить объем тела, образованного вращением лепестка, вокруг оси абсцисс  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ .

Решение .

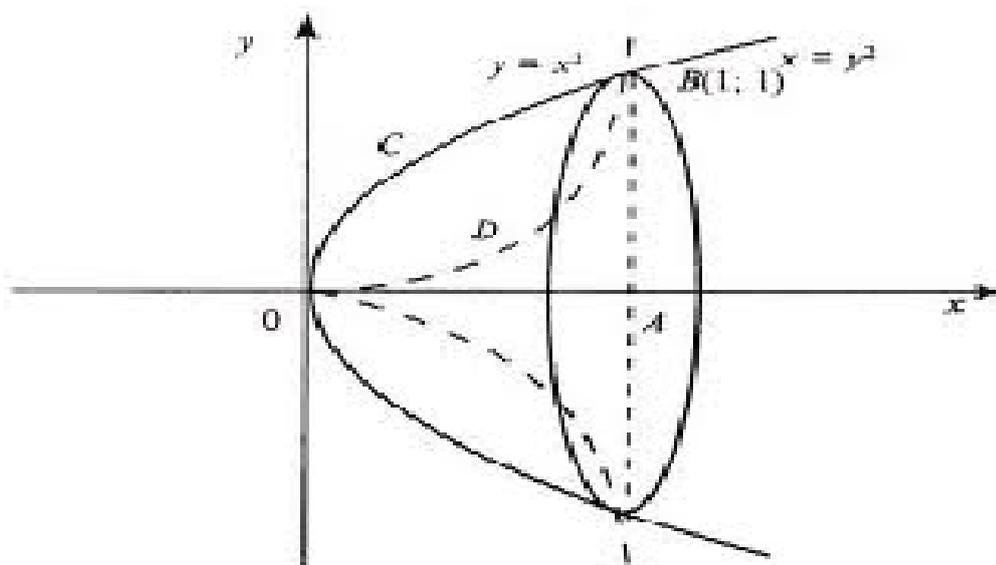


Рисунок 2

Построим графики функции.  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ . График  $y^2 = x$  преобразуем к виду  $y = \sqrt{x}$ .

Имеем  $V = V_1 - V_2$  Вычислим объем каждой функции

$$V_1 = \pi \int_0^1 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

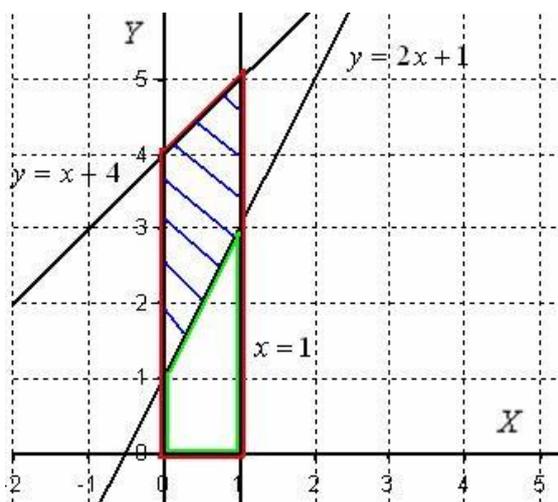
$$V_2 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = 0,3\pi$$

### Пример 5

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x + 1$ ,  $y = x + 4$ ,  $x = 0$  и  $x = 1$

**Решение:** Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями  $y = 2x + 1$ ,  $y = x + 4$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , не забывая при этом, что уравнение  $x = 0$  задает ось  $OY$ :



Искомая фигура заштрихована. При её вращении вокруг оси  $OX$  получается бублик с четырьмя углами.

Объем тела вращения вычислим как *разность объемов тел*.

Сначала рассмотрим фигуру, которая обведена красным цветом. При её вращении вокруг оси  $OX$  получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через  $V_1$ .

Рассмотрим фигуру, которая обведена зеленым цветом. Если вращать данную фигуру вокруг оси  $OX$ , то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через  $V_2$ .

И, очевидно, разность объемов  $V = V_1 - V_2$  — в точности объем нашего «бублика».

Используем стандартную формулу для нахождения объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

1) Фигура, обведенная красным цветом ограничена сверху прямой  $y = x + 4$ , поэтому:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (x + 4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16) dx = \pi \left( \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{3} + 4 + 16 \right) = \frac{61\pi}{3}$$

2) Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой  $y = 2x + 1$ , поэтому:

$$V_2 = \pi \int_0^1 (2x + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1) dx = \pi \left( \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$$

3) Объем искомого тела вращения:

**Ответ:**  $V = 16\pi \text{ ед.}^3 \approx 50,3 \text{ ед.}^3$ .

Можно решение оформить так:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (x+4)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \dots$$

Пример 6

Дана плоская фигура, ограниченная линиями  $y = 3 + \sqrt{x}$ ,  $y = 3 - \sqrt{x}$ ,  $x=2$

- 1) Найти площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями.
- 2) Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси  $OY$ .