11 класс. Решения и критерии

1. Расположите числа от 1 до 101 по кругу так, чтобы соседние числа отличались на 2 или на 5.

Решение. Например,

$$13, 11, 9, 4, 2, 7, 5, 3, 1, 6, 8, 10, 12, \ldots, 92, 94, 96, 101, 99, 97, 95, 100, 98, 93, 91, 89, \ldots, 15, 13$$

Критерии. Если читателю приходится самому догадываться (но это удается), где расположено некоторое число – не более 5 баллов.

2. Докажите, что при любом x среди чисел $|\cos x - \sin x|$ и $|\sin x + \cos x|$ найдется число, не меньшее единицы.

Решение. Пусть $a = |\cos x - \sin x| < 1$ и $b = |\sin x + \cos x| < 1$. Тогда $a^2 < 1$ и $b^2 < 1$ и $a^2 + b^2 < 2$. С другой стороны, $a^2 + b^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2$. Полученное противоречие показывает, что предположение «$a < 1$ и $b < 1$» неверно. Значит, либо a, либо b не меньше 1.

Критерии. Только проверка конкретных частных случаев – не более 1 балла. Проверка только для x из некоторых (не всех возможных) промежутков – не более 3 баллов.

3. В треугольник ABC вписана окружность, точки касания окружности со сторонами треугольника – M, N и K. Основания высот треугольника MNK образуют треугольник PQR. Докажите, что треугольник PQR подобен треугольнику ABC.

Решение. Пусть $M \in BC, N \in CA, K \in AB$ и $P \in KN, Q \in NM, R \in MK$. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle MNC = \angle MKN = \angle PQN$. Следовательно, $PQ||AC$. Аналогично, $PR||AB$ и $QR||BC$. Следовательно, треугольники ABC и PQR подобны.

Критерии. В решении есть утверждение, которое не является общеизвестным и которое читатель не способен сам установить за 5 минут – не более 3 баллов.

4. Папа готовит подарки. Он разложил 115 конфет в пакеты, причем все они разные по числу конфет. В трех самых маленьких подарках находится 20 конфет, в трех самых больших – 50. Во сколько пакетов разложены конфеты? Сколько конфет в самом маленьком подарке?

Ответ: 10 пакетов, 5 конфет.

Решение. Пронумеруем подарки от меньшего к большему, от 1 до n. Если в третьем 7 или меньше конфет, то в трех меньших подарках не более $7 + 6 + 5 = 18$ конфет. Это противоречит условию. Итак, в третьем подарке не менее 8 конфет. Аналогично, в третьем с конца подарке не более 15 конфет $(16 + 17 + 18 = 51 > 50)$.

Уберем три самых больших и три самых маленьких подарка. В оставшихся будет $115 - 20 - 50 = 45$ конфет, причем в каждом от 9 до 14. Трех пакетов явно не хватит $(14 + 13 + 12 = 39)$, а пять будет лишнего $(9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55)$. Значит, 45 конфет разложено в 4 пакета. Это возможно: $47 = 9 + 11 + 12 + 13$. Заметим, что в четвертом пакете не может быть более 9 конфет: $10 + 11 + 12 + 13 = 46 > 45$).

Если в четвертом пакете 9 конфет, то в третьем не больше 8, во втором – не больше 7, так что в первом пакете – не менее $20 - 8 - 7 = 5$ конфет. Но и не более, так как $6 + 7 + 8 = 21$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для третьего с начала и третьего с конца пакета – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа пакетов – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

5. Дан отрезок AB. Внутри него расположено несколько других отрезочков. При этом эти несколько отрезочков все вместе покрывают отрезок AB. Докажите, что если у каждого отрезочка отбросить одну из половин, левую или правую, то оставшиеся половины будут покрывать не менее $1/3$ длины AB.

Решение: Каждую оставшуюся половину отрезочка s «растянем» в три раза (гомотетия с коэффициентом 3 и с центром в середине этой половины). Результат этой гомотетии, очевидно, содержит целый отрезочек s. Поэтому «утроения», вместе взятые, заведомо покрывают все исходные отрезочки, а те в свою очередь покрывают AB и тем самым имеют общую длину не меньше длины AB. Ну, а суммарная длина втрое меньших половинок тогда не менее трети длины исходного отрезка AB.

Критерии. Только частные случаи с конкретным количеством отрезков – не более 1 балла. Доказаны крупные частные случаи (например, когда отбрасываются все время правые половинки отрезочков, а отрезочки произвольные) – до 3 баллов. Общее описание «наихудшего» случая, с получением оценки $1/3$ длины AB, но без ясного доказательства, что случай «наихудший» – не более 3 баллов.

10 класс. Решения и критерии

1. Числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ написаны на доске. Можно дописать на доску сумму, разность или произведение любых двух *различных* чисел, уже выписанных на доске. Докажите, что можно выписать на доске число 1.

Решение: Например, получаем $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, затем $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ и $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=5-2=3$, затем $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$, потом $\sqrt{10}-3$ и $\sqrt{10}+3$ и наконец $(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)=10-9=1$.

Критерии. Цель достигнута в случае, когда при некоторых операциях используются одинаковые числа (это запрещено условием) – 3 балла.

2. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}>\frac{1}{2}.$$

Решение.

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}>\frac{a}{2a+2b+2c}+\frac{b}{2b+2c+2a}+\frac{c}{2c+2a+2b}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}.$$

Замечание: на самом деле эта сумма не меньше 1. Пусть $a+2b=x$, $b+2c=y$ и $c+2a=z$. Тогда $a=\dfrac{x-2y+4z}{9}$, $b=\dfrac{y-2z+4x}{9}$ и $c=\dfrac{z-2x+4y}{9}$. Значит,

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{x-2y+4z}{9y}+\frac{y-2z+4x}{9z}+\frac{z-2x+4y}{9x}=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)-\frac{6}{9}\geqslant\frac{1}{9}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}+\frac{4}{9}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}}-\frac{2}{3}=1.$$

Критерии. Только проверка частных случаев при конкретных a, b, c – не более 1 балла. Неравенство сведено к другому неравенству, которое участник считает очевидным или общеизвестным, а читатель не считает таковым – не более 3 баллов в зависимости от степени продвижения.

3. Из 80 одинаковых деталей Lego собрали несколько фигурок, причем число использованных деталей во всех фигурках разное. На изготовление трех самых маленьких фигурок ушло 14 деталей, в трех самых больших использовано суммарно 43. Сколько собрали фигурок? Сколько деталей в самой большой фигурке?

Ответ. 8 фигурок, 16 деталей.

Решение. Обозначим число деталей в фигурках через $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Если $a_3\leqslant 5$, то $a_3+a_2+a_1\leqslant 5+4+3=12<14$. Значит, $a_3\geqslant 6$.

Аналогично можно рассмотреть три самых больших фигурки: $14+15+16=45>43$, поэтому $a_{n-2}\leqslant 13$.

Уберем три самых больших и три самых маленьких фигурки. В оставшихся будет $80-14-43=23$ детали, причем в каждой от 7 до 12. Одной фигурки явно не хватит, а три будет лишнего $(7+8+9=24)$. Значит, 23 детали образуют 2 фигурки. Это возможно, причем единственным способом: $23=11+12$. Имеем $43=13+14+16$ – единственное разложение с $a_6\geqslant 13$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для a_3 и a_{n-2} – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа фигурок – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

4. Диагонали описанной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC равны 6, 2 и $3/2$ соответственно. Найдите радиус вписанной окружности треугольника COD.

Ответ: 3

Решение. Докажем более общее утверждение, что $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_4}$, где r_1, r_2, r_3 и r_4 – радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC и COD соответственно.

Обозначим $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $OA=x$, $OD=y$, $S_{\Delta AOD}=S$. Пусть $\dfrac{b}{d}=k$.

Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом k, поэтому $S_{\Delta COB}=k^2S$, $OB=ky$, $OC=kx$, $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}=kS$. Тогда

$$r_1=\frac{2S}{x+y+d},\quad r_3=\frac{2k^2S}{kx+ky+b},\quad r_2=\frac{2kS}{ky+x+a},\quad r_4=\frac{2kS}{kx+y+c}.$$

Значит,

$$2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right)=\frac{x+y+d}{S}+\frac{kx+ky+b}{k^2S}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{dk+\frac{b}{k}}{kS}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{b+d}{kS}.$$

Здесь мы использовали, что $dk=b$ и $\dfrac{b}{k}=d$ из подобия треугольников AOD и BOC. Далее,

$$2\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}\right)=\frac{kx+y+c}{kS}+\frac{x+ky+a}{kS}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{a+c}{kS}=\frac{x+y}{S}+\frac{x+y}{kS}+\frac{b+d}{kS},$$

где $a+c=b+d$, поскольку трапеция описанная. Таким образом, мы доказали, что $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_4}$.

По условию, $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{1,5}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{r_4}$, откуда $r_4=3$.

Критерии. В решении есть утверждение, которое не является общеизвестным и которое читатель не способен сам установить за 5 минут – не более 3 баллов.

5. На доске 10×10 расставлены 10 фишек так, что в каждом горизонтальном и вертикальном ряду стоит по одной фишке. Можно ли оставшуюся часть доски замостить прямоугольниками 1×2 (по клеткам)?

Ответ: нельзя.

Решение. Раскрасим доску в шахматном порядке и занумеруем строки и столбцы. Если оставшуюся часть доски можно замостить прямоугольниками 1×2, то она содержит одинаковое число чёрных и белых клеток, тогда 5 фишек стоят на чёрных клетках, и 5 на белых. Заметим, что у белой клетки сумма номера строки и столбца чётна, а у чёрной – нечётна. Следовательно, сумма номеров строк и столбцов, в которых стоят фишки, нечётна (как сумма пяти чётных и пяти нечётных чисел). Но поскольку фишки стоят на каждой горизонтали и каждой вертикали, то сумма номеров строк и столбцов равна $2(1+2+\ldots+10)$, что является чётным числом. Полученное противоречие доказывает, что замостить доску требуемым образом нельзя.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только несколько конкретных частных случаев расположения фишек – не более 1 балла. При произвольном расположении фишек невозможность разместить доминошки доказывается (незаконченным) перебором вариантов расположения доминошек – до 2 баллов в зависимости от степени общности рассмотренного случая.

9 класс. Решения и критерии

1. Коля говорит, что две шоколадки дороже пяти жвачек, Саша – что три шоколадки дороже восьми жвачек. Когда это проверили, прав оказался только один из них. Верно ли, что 7 шоколадок дороже, чем 19 жвачек? Не забудьте обосновать ответ.

Решение. Пусть цена шоколадки c, а цена жвачки g. Коля говорит, что $2c > 5g$ или $6c > 15g$, а Саша говорит, что $3c > 8g$ или $6c > 16g$. Если бы Саша был прав, то был бы прав и Коля – это противоречит условию. Значит, прав Коля, но не Саша, и на деле $3c \leqslant 8g$ или $21c \leqslant 56g < 57g$, то есть $21c < 57g$ и $7c < 19g$. Ответ: неверно.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только частные случаи конкретных цен для шоколадок и жвачек – не более 1 балла. В задачу вводятся дополнительные условия, вроде предположений о денежных единицах – не более 1 балла. Доказательство целиком основано на соотношениях типа «$\approx$» (приближенно равно) – не более 1 балла.

2. Расположите в одной строке числа от 1 до 100 так, чтобы числа стоящие по соседству отличались либо на 2, либо на 5.

Решение: Например, $99, 97, \ldots, 13, 11, 9, 4, 2, 7, 5, 3, 1, 6, 8, 10, 12, \ldots, 98, 100$.

Критерии. По описанию участника не очевиден порядок чисел в последовательности (участник предлагает «додумать» самому читателю) – не более 3 баллов.

3. Петя и Вася играют в игру на клетчатом поле 9×9. В начале игры в центральной клетке стоит фишка. Петя и Вася передвигают ее по очереди в соседнюю по стороне клетку. При этом Петя своим ходом может либо продолжить направление предыдущего хода Васи, либо повернуть направо. Вася же может своим ходом либо продолжить направление предыдущего хода Пети, либо повернуть налево. Проигрывает игрок, который не может сходить. Первый ход Петя может делать в любом направлении. Может ли Петя наверняка победить?

Ответ: нет, не может. Понятно, что выиграть может только тот игрок, который своим ходом поставит фишку в угол. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. С каждым ходом цвет поля, на котором стоит фишка, меняется. Поскольку все угловые клетки доски 9×9 – того же цвета, что и центральная, поставить фишку в угол может только игрок, ходящий на поля черного цвета, то есть Вася.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Рассматриваются лишь некоторые (не все) способы игры Пети, либо только способы игры, где Вася «подыгрывает» Пете (делает предсказуемые ходы) – не более 3 баллов.

4. Поликарп записал на доске пример на умножение двух трехзначных чисел и вместо знака умножения написал 0. В результате, он получил семизначное число, которое в целое число раз больше произведения. Во сколько именно?

Ответ. В 73.

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Тогда указанное семизначное число будет иметь вид $10000a + b$, по условию $10000a + b = nab$, откуда $b = \dfrac{10000a}{na - 1}$. Заметим, что числа a и $na-1$ не имеют общих делителей, так что $na-1 = p$ – делитель 10000. Кроме того, $nab \geqslant 10000a$, то есть $n \geqslant \dfrac{10000}{999} > 10$. Значит, $n \geqslant 11$, $p \geqslant 1099$, то есть надо проверить значения p равные 10000, 5000, 2500, 2000, 1250 и искать те из них, для которых $p+1$ раскладывается на двузначный (n) и трехзначный (a) делители.

Пусть $p = 10000$, имеем $10001 = 73 \cdot 137$, тогда $n = 73$, $a = b = 137$.

Пусть $p = 5000$, $5001 = 3 \cdot 1667$, число 1667 – простое; трехзначных делителей нет.

Пусть $p = 2500$, $2501 = 41 \cdot 61$, нет трехзначных делителей.

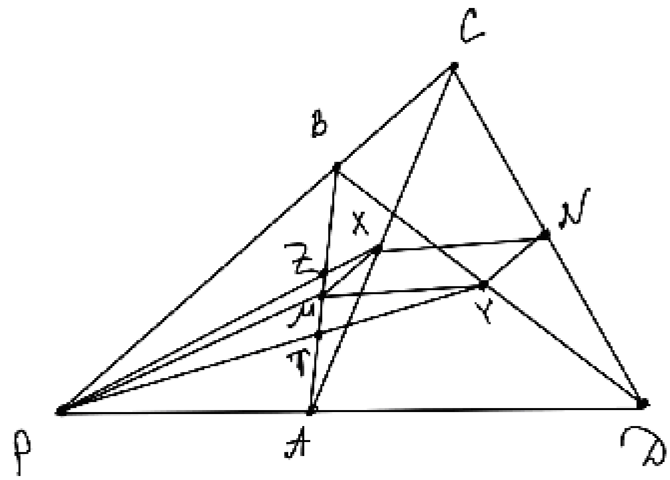
Пусть $p = 2000$, $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. В силу того, что $n \geqslant 11$, подходит значение n не менее 23, но тогда $a \leqslant 3 \cdot 29 = 87$ двузначно.

Пусть $p = 1250$, $1251 = 3 \cdot 417$, число 417 – простое. Нет разложения на двузначное и трехзначное числа.

Итак, остается только вариант $n = 73$, и условия действительно выполняются: $\dfrac{1370137}{137 \cdot 137} = 37$.

Критерии. Только ответ – 1 балл, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но перебор неполный или необоснованный – 5 баллов.

5. Точки X и Y – середины диагоналей соответственно AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке P. Докажите, что площадь треугольника PXY в четыре раза меньше площади четырёхугольника $ABCD$.



Решение: Пусть M и N – середины сторон AB и CD соответственно, а точка P и сторона CD лежат по разные стороны от прямой AB. Четырёхугольник $MXNY$ – параллелограмм, поэтому $S_{\Delta MXY} = S_{\Delta NXY}$. Обозначим $S_{ABCD} = S$. Тогда $S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCD} = 2S$. Отрезок MX – средняя линия треугольника ABC, поэтому прямые MX и CP параллельны, значит, точки B и P равноудалены от прямой MX.

Следовательно, $S_{\Delta PMX} = S_{\Delta BMX} = S_{BCXM} - S_{\Delta BCX} = \dfrac{3}{4} S_{\Delta ABC} - \dfrac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4} S_{\Delta ABC}$.

Аналогично точки A и P также равноудалены от прямой MY. Следовательно, $S_{\Delta PMY} = S_{\Delta AMY} = \dfrac{1}{4} S_{\Delta ABD}$. Кроме того, точка Z пересечения диагоналей BM и PX трапеции $BPMX$ лежит внутри трапеции $BPMX$, а точка T пересечения диагоналей трапеции $AYMP$ – внутри трапеции $AYMP$, поэтому точка M лежит на отрезке ZT, а значит, внутри треугольника PXY. Заметим, что

$$S_{MXNY} = S - S_{\Delta CNX} - S_{\Delta DNY} - S_{AMYD} - S_{BCXM} = S - \frac{1}{4} S_{\Delta ACD} - \frac{1}{4} S_{\Delta BCD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABC}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta PXY} = S_{\Delta MXY} + S_{\Delta PMX} + S_{\Delta PMY} = \frac{1}{2} S_{MXNY} + S_{\Delta PMX} + S_{\Delta PMY} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(S - \frac{1}{4} S_{\Delta ACD} - \frac{1}{4} S_{\Delta BCD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABD} - \frac{3}{4} S_{\Delta ABC}\right) + \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} + \frac{1}{4} S_{\Delta ABD} =$$

$$= \frac{1}{2} S - \frac{1}{8}\left(S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCD}\right) = \frac{S}{2} - \frac{2S}{8} = \frac{S}{4}.$$

Что и требовалось доказать.

8 класс. Решения и критерии

1. Пиццу разрешается резать на одинаковые части, частей должно быть не более 6. Как разделить между 15 человеками поровну 8 одинаковых пицц? («Лишние» куски пиццы оставаться не должны)

Решение: Например, разрежем первые три пиццы на 5 одинаковых частей каждую – получим 15 одинаковых кусков по $1/5$ пиццы. Затем оставшиеся 5 пицц разрежем на 3 части каждую – получим 15 одинаковых кусков по $1/3$ пиццы. Выдав каждому из 15 человек по одному куску того и другого типа, мы и получим требуемое.

Критерии. Любое верное решение – 7 баллов. Если пиццы разрезаны, но по тексту непонятно, как куски распределяются между 15 человеками – не более 5 баллов.

2. Даны три не обязательно целых числа. Если каждое из данных чисел увеличить на 1, то произведение чисел тоже увеличится на 1. Если каждое из чисел увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. Найдите эти числа.

Решение. Пусть искомые числа a, b, c. По условию, $(a+1)(b+1)(c+1) = abc+1$ и $(a+2)(b+2)(c+2) = abc+2$. Раскрывая скобки, получаем соответственно $ab+bc+ca+a+b+c=0$ и $2(ab+bc+ca)+4(a+b+c) = -6$. Отсюда $a+b+c=-3$ и $ab+bc+ca=3$. Поскольку $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 9$, имеем $a^2+b^2+c^2=3$. Но тогда $2\cdot 3 - 2\cdot 3 = 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) = (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$, значит $a=b=c$ и с учетом $a=b=c=-3$ будет $a=b=c=-1$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Найдены $a+b+c$ и $ab+bc+ca$ – 2 балла, если после этого угадан ответ – еще 1 балл. Найдены $a+b+c$ и $a^2+b^2+c^2$ – 3 балла, если после этого угадан ответ – еще 1 балл. Написано $a^2+ab+b^2+3a+3b+3=0$ – 4 балла, если после этого угадан ответ – еще 1 балл. Любое верное решение – 7 баллов.

3. Поликарп вместо обычного умножения трехзначных чисел решил просто «склеить числа», приписав одно число за другим. Результат оказался в 7 раз больше, чем обычное. Какие числа перемножал Поликарп?

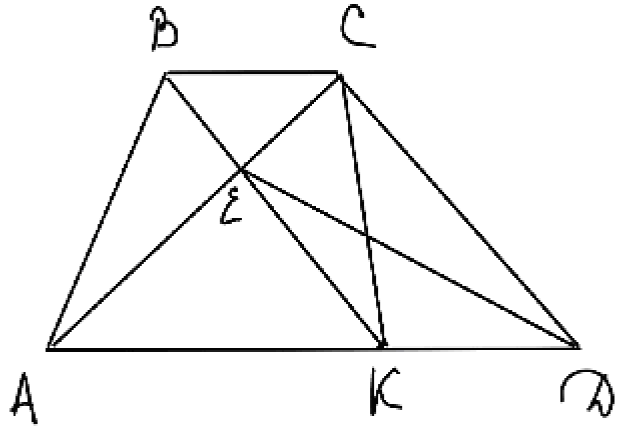
Ответ. 143 и 143.

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Результат обычного умножения будет ab, результат «склеивания» – $1000a+b$. По условию они связаны соотношением $1000a+b=7ab$, откуда $b = \dfrac{1000a}{7a-1}$. Заметим, что числа a и $7a-1$ не имеют общих делителей, так что $p = 7a-1$ – делитель 1000. В силу того, что $a \geqslant 100$ имеем $p \geqslant 699$, но тогда $p = 1000$, $a = \dfrac{1000}{7} = 143$ и $b = a$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но не доказано, что других нет – 5 баллов.

4. На диагонали AC трапеции с основанием AD выбрали точку E. Укажите способ выбора точки E так, чтобы треугольники ABC и ECD были равновеликими (то есть имели равные площади).

Ответ. Точка E должна быть точкой пересечения диагонали AC и прямой BK, параллельной стороне CD.



Решение. Площадь треугольника ECD равна площади треугольника CKD, так как у них общее основание CD и равные высоты, проведенные к этому основанию (в силу того, что CD параллельно EK).

Площадь треугольника CKD равна площади треугольника ABC, так как у них равные основания BC и KD (свойство параллелограмма) и равные высоты (в силу того, что BC параллельно KD).

Отсюда и следует требуемое.

5. У Миши есть квадрат 7×7 из бумаги, все клетки которого белые. Миша хочет закрасить N клеток в черный цвет. При каком наименьшем N Миша может покрасить клетки так, что после закрашивания из квадрата нельзя было бы вырезать по клеткам никакого полностью белого прямоугольника с числом клеток не менее десяти?

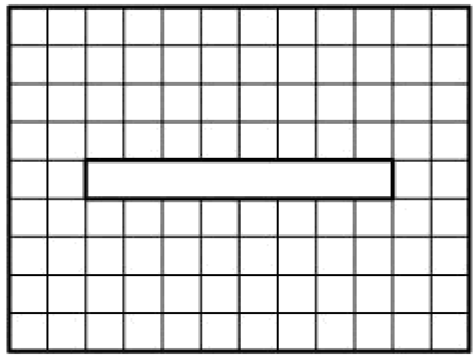
Ответ: 4.

Решение. Разобьём квадрат 7×7 на 5 прямоугольников: четыре 3×4 (угол каждого такого прямоугольника совпадает с одним из углов квадрата 7×7) и квадрат 1×1. Если закрашено только три клетки, то найдётся белый прямоугольник из 12 клеток. Пример для 4 клеток: закрашиваем $b4, d2, d6, f4$ в шахматных обозначениях.

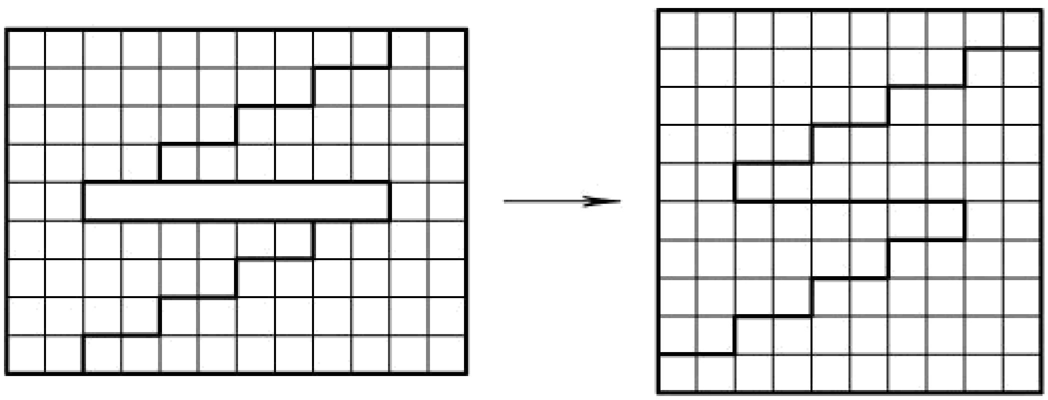
Критерии. Только ответ – 0 баллов. Правильный пример для 4 клеток – 3 балла. Доказательство того, что 3 черных клеток не хватит – 4 балла. Баллы за части этой задачи суммируются.

7 класс. Решения и критерии

1. Изображённую на рисунке фигуру (прямоугольник 9×12 с дыркой 1×8 в центре) разрежьте на две равные части, из которых можно сложить квадрат.



Решение.



Критерии. Разрезание, для которого читателю неочевидно, как сложить квадрат (но квадрат складывается) – 5 баллов.

2. Гена зашифровал ряд из пяти целых чисел: Б, АН, АХ, НО, ФФ. Здесь разные цифры обозначены разными буквами, одинаковые цифры – одинаковыми буквами, запятая отделяет соседние числа (и в «НО» второй символ – буква «О»). Гена забыл зашифрованные числа, но помнит, что разность любых двух соседних чисел равна одному и тому же числу (из правого числа вычитается левое число). Можно ли однозначно установить, какие числа зашифровал Гена?

Ответ: 5, 12, 19, 26, 33.

Решение. Все эти числа можно определить, если знать первое число и разность d двух соседних. У второго и третьего чисел совпадают первые цифры, то есть они находятся в одном десятке, и их разность, равная d, не превосходит 9. А значит, прибавив d к первому (однозначному) числу, мы можем получить только двузначное число, начинающееся на 1, то есть А $=$ 1. Аналогично, Н $=2$, Ф $=3$, так как в этих случаях тоже к двузначному числу прибавляется число, не превосходящее 9, и первая цифра увеличивается на 1. Получаем запись: Б, 12, 1Х, 2О, 33.

Заметим, что 1Х–12 $=$ 2О–1Х $=$ 33–2О $= d$. Сложив эти равенства, получим: $33 - 12 = 3d$, откуда $d = 7$. Мы восстановили последнее число и разность. Дальше легко восстановить запись: 5, 12, 19, 26, 33.

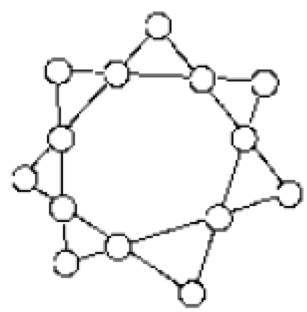
Критерии. За нахождение цифр А, Н, Ф по 1 баллу за каждую цифру. За нахождение разности d – 3 балла, за окончательный ответ 1 балл, баллы суммируются. Если верный ответ найден подбором и не доказана его единственность – 5 баллов. При этом если обоснована запись: Б, 12, 1Х, 2О, 33, а дальше использован подбор – 6 баллов.

3. Коля говорит, что две шоколадки дороже пяти жвачек, Саша – что три шоколадки дороже восьми жвачек. Когда это проверили, прав оказался только один из них. Верно ли, что 7 шоколадок дороже, чем 19 жвачек? Не забудьте обосновать свой ответ.

Решение. Пусть цена шоколадки c, а цена жвачки g. Коля говорит, что $2c > 5g$ или $6c > 15g$, а Саша говорит, что $3c > 8g$ или $6c > 16g$. Если бы Саша был прав, то был бы прав и Коля – это противоречит условию. Значит, прав Коля, но не Саша, и на деле $3c \leqslant 8g$ или $21c \leqslant 56g < 57g$, то есть $21c < 57g$ и $7c < 19g$. Ответ: неверно.

Критерий. Только ответ – 0 баллов. Только частные случаи с конкретными ценами шоколадки и жвачки – 1 балл. При доказательстве используются соотношения типа «$\approx$» (приближенно равно) – не более 3 баллов.

4. Есть набор из целых чисел: две двойки, три тройки, четыре четверки, пять пятерок (всего 14 чисел). Эти числа расставили в кружки звезды на рисунке



Могло ли получиться так, что все суммы чисел вдоль каждого отрезка (на котором 4 кружка) равны между собой?

Ответ: нет

Решение. Сумма чисел во всех кружках равна $2\cdot2+3\cdot3+4\cdot4+5\cdot5 = 54$. Поскольку каждый кружок расположен на двух отрезках, сумма всех указанных в условии сумм равна $54\cdot2 = 108$. Если бы все эти суммы были равны между собой, сумма всех сумм должна была бы делиться на 7, но 108 не делится на 7.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только некоторые частные попытки расставить числа, возможно с какими-то наблюдениями – не более 2 баллов. Только вычислена сумма всех чисел – 3 балла.

5. Имеется квадрат 6×6, все клетки которого белые. За один ход разрешается изменить цвет обеих клеток в любой доминошке (прямоугольнике из двух клеток) на противоположный. За какое наименьшее число ходов можно получить квадрат с шахматной раскраской? Не забудьте объяснить, почему меньшего количества ходов не хватит.

Ответ. 18 ходов.

Решение. Заметим, что в шахматной раскраске квадрата 6×6 присутствует 18 черных клеток. При этом никакие две из них не могут стать черными за один ход, потому что не покрываются одной доминошкой. Следовательно, потребуется минимум 18 ходов (хотя бы одному на клетку). Сделать это за 18 ходов можно, например, так: разбить доску на 9 квадратов 2×2, а в каждом квадрате перекрасить сначала нижнюю доминошку, а затем – правую. Есть и другие алгоритмы.

Критерии. Только ответ 1 балл, правильно составлен алгоритм – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.