Б.С.Орлов

Окружность и многоугольники

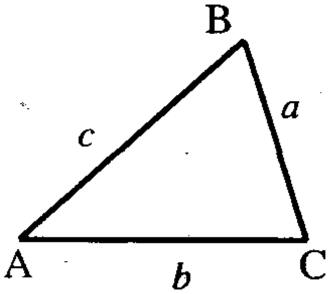
по материалам
учебника геометрия-7-9

по материалам
учебника геометрия-7-9

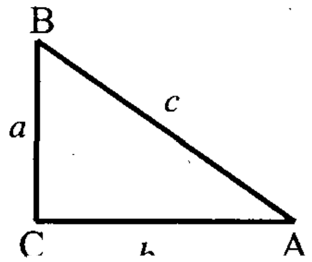
Пособие предназначено учащимся старших классов средней школы и учителям.

Треугольник.

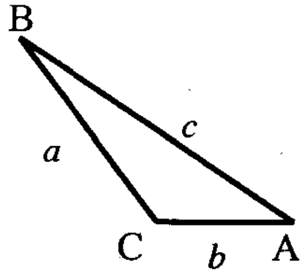
Треугольник — это многоугольник с тремя сторонами. Стороны треугольника обозначаются малыми буквами, соответствующими обозначению противоположных вершин.



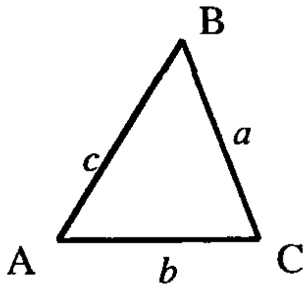
Если все три угла острые — треугольник **остроугольный .**



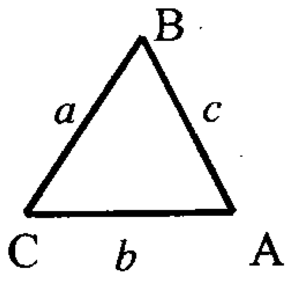
Если один из углов прямой — треугольник **прямоугольный.** Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** *(a* и b*),* сторона против прямого угла — **гипотенузой** *(c).*



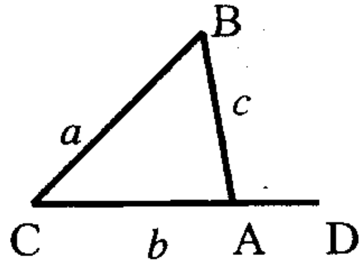
Если один из углов тупой — треугольник **тупоугольный.**



Треугольник ABC **равнобедренный**, если его две стороны равны *(a* = c);
Равные стороны равнобедренного треугольника называются **боковыми,** третья сторона — **основанием.**



Треугольник ABC **равносторонний** , если его три стороны равны *(a = c = b).*
Равносторонний треугольник имеет равные углы и наоборот: если углы треугольника равны, то он является **равносторонним.**
В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.



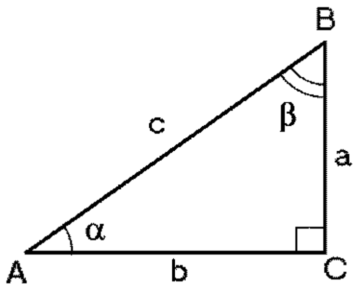
Продолжив одну из сторон треугольника ABC (AC), получим внешний угол BAD. Внешний угол равен сумме внутренних , с ним не смежных: $\angle BAD = \angle C + \angle B$

Во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против равных сторон — равные углы и обратно.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Во всяком треугольнике сумма углов равна 180°:

$$\angle A + \angle C + \angle B = 180^o \text{ или } \alpha + \beta + \gamma = 180^o$$



$$\Delta ABC - \textit{прямоугольный}$$

$$\angle C = 90^o \Rightarrow \angle A + \angle B = 90^o$$

Теорема Пифагора: квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике равен сумме квадратов его катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2, \ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \ tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \ ctg\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} \text{ или } \sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

$$\sin \angle B = \frac{AC}{AB} \text{ или } \sin \beta = \frac{b}{c}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} \text{ или } \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \angle B = \frac{BC}{AB} \text{ или } \cos \beta = \frac{a}{c}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему .

$$tg\angle A = \frac{BC}{AC} \text{ или } tg\alpha = \frac{a}{b}. \qquad tg\angle B = \frac{AC}{BC} \text{ или } tg\beta = \frac{b}{a}$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему .

$$ctg\angle A = \frac{AC}{BC} \text{ или } ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

$$ctg\angle B = \frac{BC}{AC} \text{ или } ctg\beta = \frac{a}{b}$$

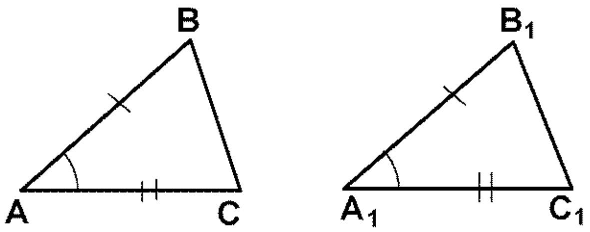
Признаки равенства треугольников.

Определение: Два треугольника называются равными , если их можно совместить наложением.

У равных треугольников соответственные стороны и углы равны.

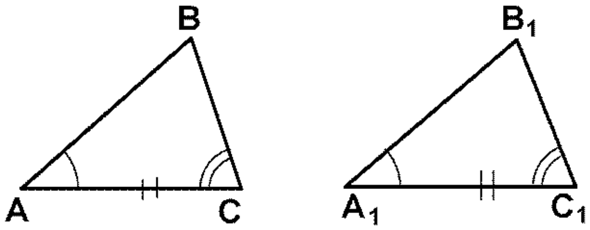
$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \begin{cases} AB = A_1B_1; AC = A_1C_1; BC = B_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1; \end{cases}$$

1 признак: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.



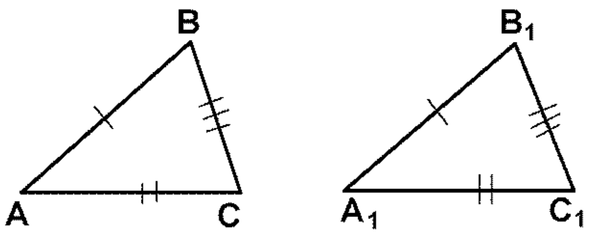
$$\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1\,(по.1.признаку).$$

2 признак: Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



$$\begin{cases} AC = A_1C_1 \\ \angle C = \angle C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1\,(по.2.признаку).$$

3 признак: Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



$$\begin{cases} AC = A_1C_1 \\ BC = B_1C_1 \\ AB = A_1B_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1\,(по.3.признаку).$$

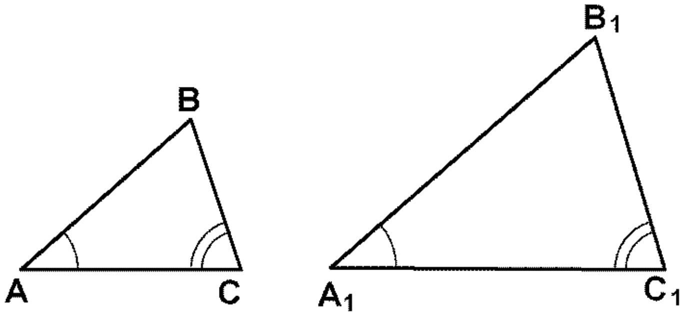
Признаки подобия треугольников.

Определение: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = k \\ \angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1; \end{cases} \qquad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{P_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta ABC}} = k - периметры \\ \dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 - площади \end{cases}$$

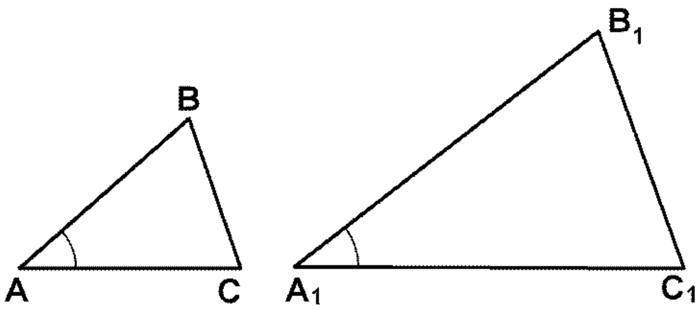
где k – коэффициент подобия.

1 признак: Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого , то такие треугольники подобны.



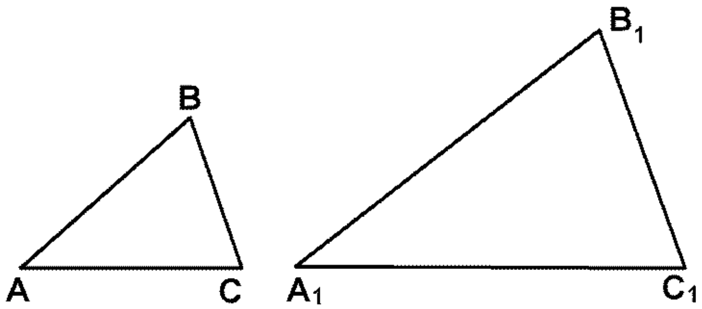
$$\begin{cases} \angle A = \angle A_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

2 признак: Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника углы , заключенные между этими сторонами , равны , то такие треугольники подобны.



$$\begin{cases} \angle A = \angle A_1 \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

3 признак : Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого , то такие треугольники подобны.



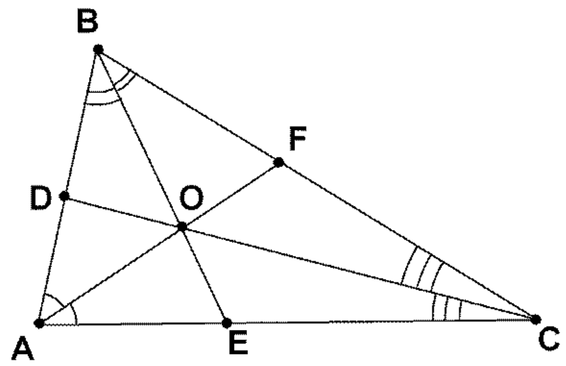
$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Биссектрисы треугольника.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противоположной стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (всегда внутри треугольника), являющейся центром вписанного круга.

Свойство биссектрис треугольника.
Биссектриса делит противоположную сторону на части , пропорциональные прилежащим к ней сторонам:



AF ; BE ; CD – биссектрисы треугольника ABC .
Справедливы следующие пропорции

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$$

$$\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta EBC}}=\frac{1/2\cdot AE\cdot h}{1/2\cdot EC\cdot h}=\frac{AE}{EC}$$

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta EBC}}=\frac{AB\cdot BE\cdot \sin\angle ABE}{EB\cdot BC\cdot \sin\angle EBC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$$ аналогично выводятся другие отношения.

Биссектриса в треугольнике равна

$$b_a=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}\quad\text{или}\quad b_a^2=bc(1-\frac{a^2}{(b+c)^2})$$

$$b_b=\frac{1}{a+c}\sqrt{ac((a+c)^2-b^2)}\quad\text{или}\quad b_b^2=ac(1-\frac{b^2}{(a+c)^2})$$

$$b_c=\frac{1}{b+a}\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}\quad\text{или}\quad b_c^2=ab(1-\frac{c^2}{(a+b)^2})$$

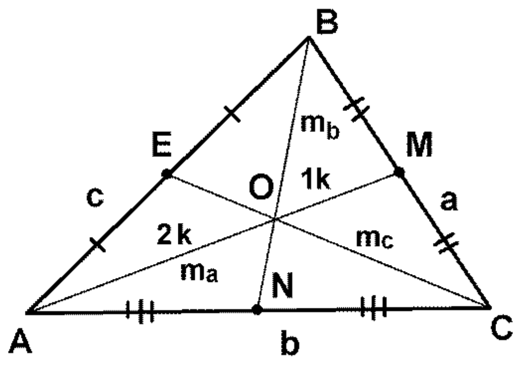
Медианы треугольника.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (всегда внутри треугольника), являющейся центром тяжести (масс) треугольника.

Медиана делит треугольник на два равновеликих. (одинаковых по площади).

Пересекаясь медианы делятся как 2 : 1.



$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

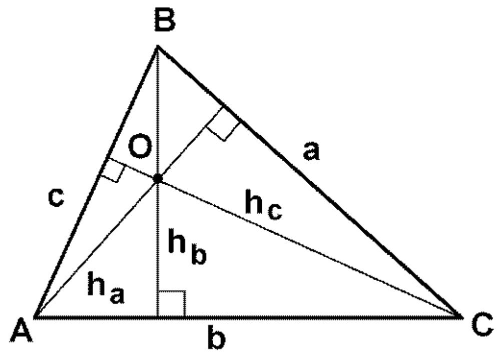
$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

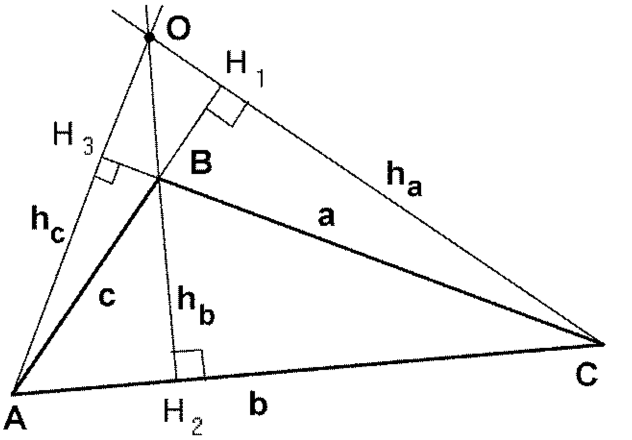
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

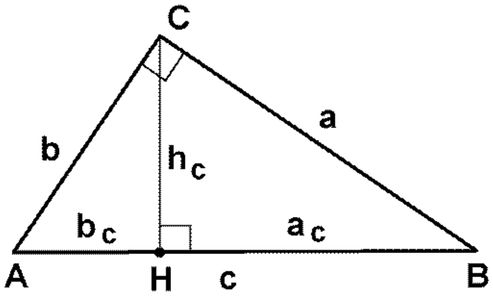
Высоты треугольника.

Высота треугольника – перпендикуляр , опущенной из вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение.

Точка пересечения трех высот треугольника называется *ортоцентром ,* который находится внутри у остроугольного треугольника и вне у тупоугольного, у прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла.







Теорема Пифагора: квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике равен сумме квадратов его катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

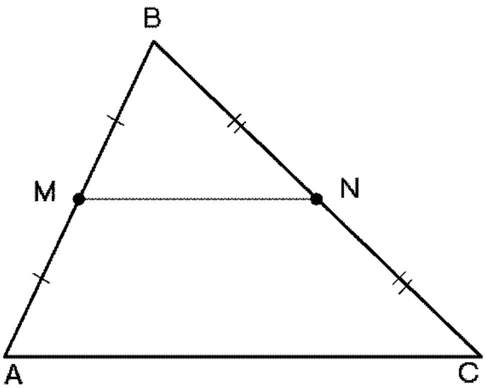
Из подобия треугольников $\Delta ACB \sim \Delta AHC \sim \Delta CHB$ следует

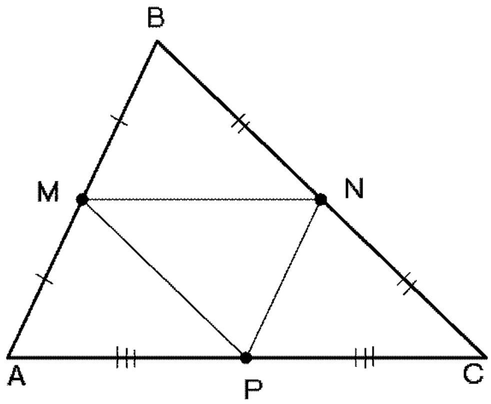
$$a^2 = ca_c \text{ , } b^2 = cb_c \text{ и } h_c^2 = a_c b_c \text{ .}$$

Средняя линия треугольника.

Средней линией треугольника называется отрезок , соединяющий середины двух его сторон.

MN , MP , NP – средние линий треугольника ABC.





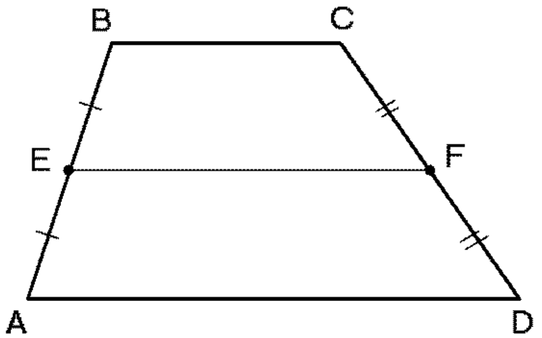
Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

$$MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}, \quad MP \parallel BC, MP = \frac{BC}{2}, \quad NP \parallel AB, NP = \frac{AB}{2}.$$

Средняя линия трапеции.

Средней линией трапеции называется отрезок , соединяющий середины ее боковых сторон.

EF – средняя линия трапеции ABCD.

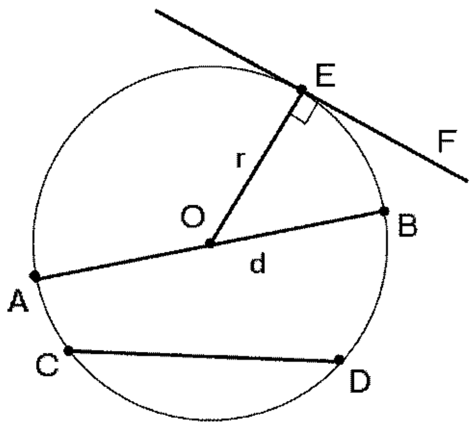


Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

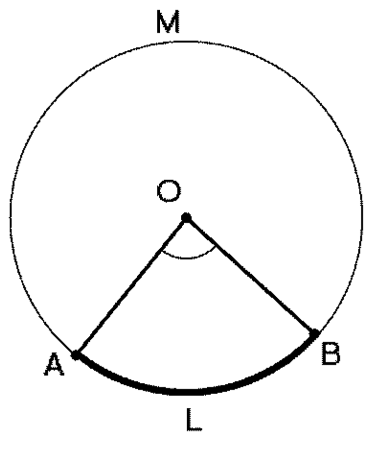
$$\begin{cases} EF \parallel BC \\ EF \parallel AD \end{cases} \Leftrightarrow EF = \frac{BC + AD}{2}$$

Окружность.

Окружностью называется геометрическая фигура , состоящая из всех точек , расположенных на заданном расстоянии от данной точки .



Точка O – центр окружности
OE (r) – радиус окружности
AB (d) – диаметр окружности
CD – хорда
Прямая EF – касательная к окружности



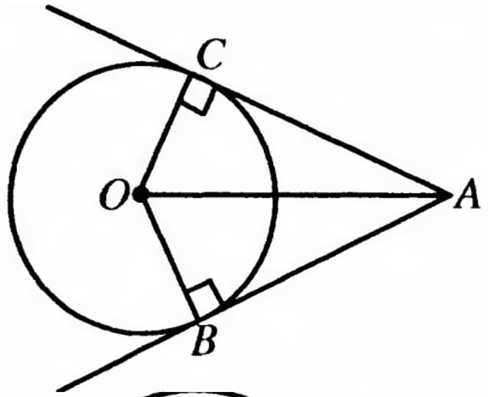
Угол AOB – центральный угол.

$\cup ALB, \cup AMB -$ дуги окружности

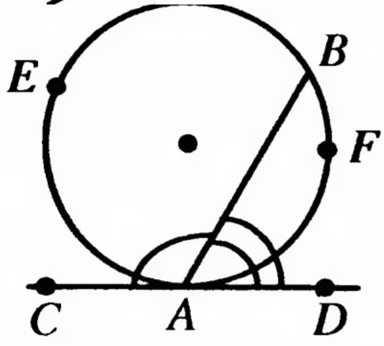
Градусная мера дуги равна градусной мере центрального угла или 360 градусов минус центральный угол.

$$\cup ALB = \angle AOB$$

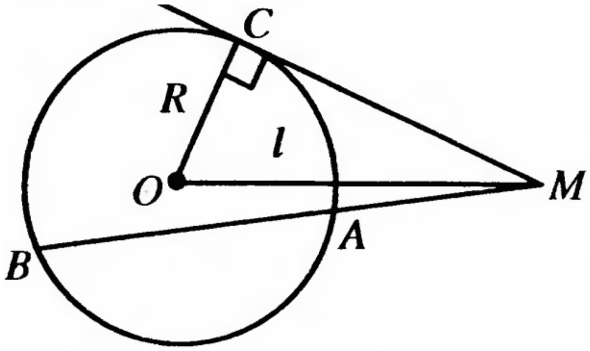
$$\cup AMB = 360^o - \angle AOB$$



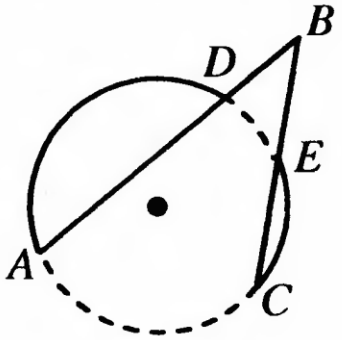
$$AC = AB,$$
$$\angle CAO = \angle BAO$$
(O — центр окружности)



$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup AEB,$$
$$\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AFB$$

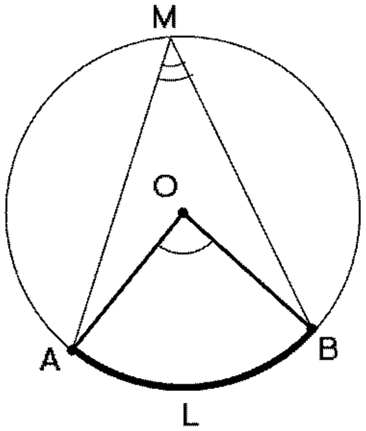


$$MA \cdot MB = MC^2,$$
$$MA \cdot MB = l^2 - R^2$$
(O — центр окружности)



$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$$

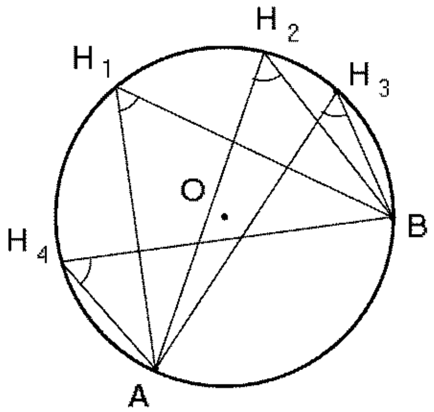
BD*BA = BE*BC



Угол AMB – вписанный угол

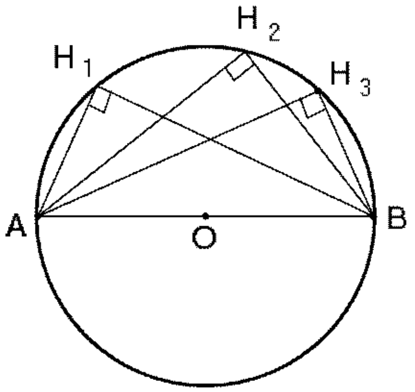
Вписанный угол измеряется половиной градусной меры дуги , на которую он опирается.

$\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot \cup ALB$.



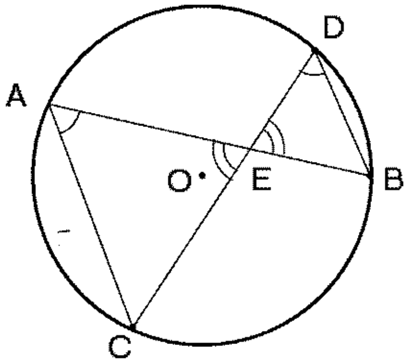
Вписанные углы , опирающиеся на одну и ту же дугу , равны .

$$\angle H_1 = \angle H_2 = \angle H_3 = \angle H_4 = ... = \angle H_n$$



Вписанный угол , опирающийся на полуокружность – прямой.

$$\angle H_1 = \angle H_2 = \angle H_3 = ... = \angle H_n = 90^o$$



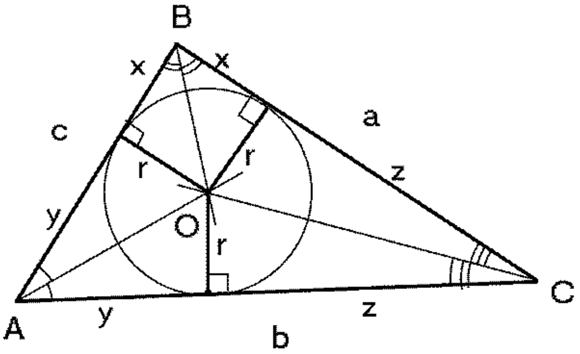
Если две хорды окружности пересекаются , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

$\Delta AEC \sim \Delta DEB (по..1..признаку) \Rightarrow$

$\frac{AE}{DE} = \frac{EC}{EB} \Leftrightarrow AE \cdot EB = DE \cdot EC$

Окружность , вписанная в треугольник.

1. Центром окружности , вписанной в треугольник , то есть касающейся сторон треугольника , является точка пересечения биссектрис треугольника .
2. Выразим радиус вписанной окружности через площадь треугольника .



$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOB}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) \cdot r$$

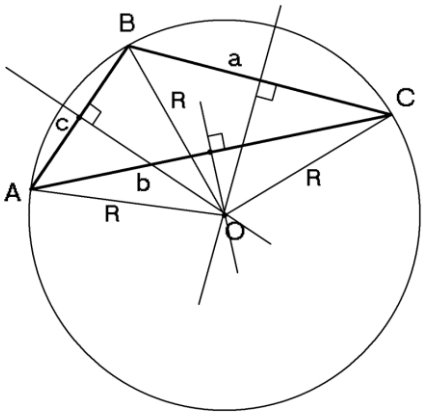
$$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{a + b + c}$$

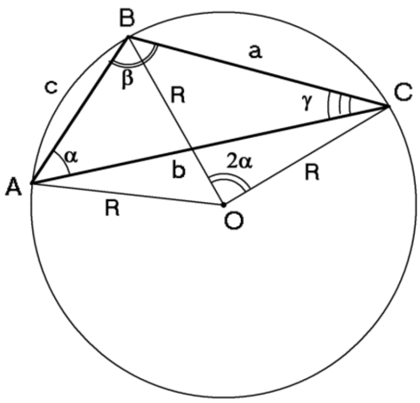
3. Площадь треугольника определим через стороны треугольника по формуле Герона .

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - формула...Герона;..где...p - полупериметр...p = \frac{a+b+c}{2}$$

Окружность , описанная около треугольника.

1. Центром окружности , описанной около треугольника , то есть когда вершины треугольника лежат на окружности , является точка пересечения серединных перпендикуляров .





2. Выразим радиус описанной окружности через площадь треугольника .
Рассмотрим треугольник ABC , угол BAC вписанный в окружность и опирающийся на дугу BC равен α , угол BOC центральный угол , опирающийся на эту же дугу и поэтому равен 2α .

Рассмотрим треугольник BOC , $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos 2\alpha$

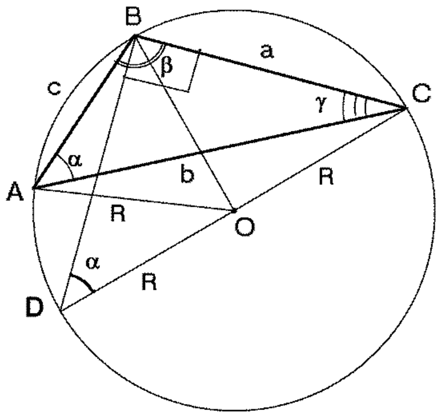
$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 2\alpha$$

$$a^2 = 2R^2 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$a^2 = 2R^2 \cdot 2\sin^2 \alpha$$

$$a = 2R \cdot \sin \alpha$$

Можно выразить еще по данной схеме :



$\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, как вписанные углы , опирающиеся на одну хорду.

ΔBDC - прямоугольный , $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow a = 2R\sin\alpha$

Умножим обе части на выражение ***bc*** и получим

$$abc = 4R\cdot\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin\alpha \qquad \Rightarrow R = \frac{abc}{4S_{\Delta ABC}},$$

$$abc = 4RS_{\Delta ABC}$$

где S – площадь вписанного треугольника , площадь которого определяется по формуле Герона .

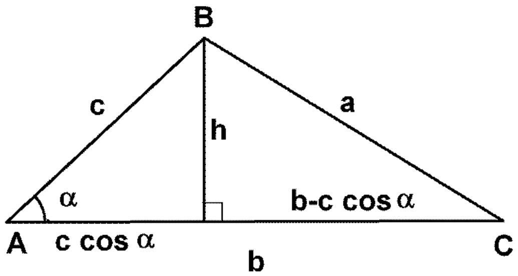
$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - формула...Герона;..где...p - полупериметр...p = \frac{a+b+c}{2}$$

Аналогично

$$a = 2R\cdot\sin\alpha$$

$$b = 2R\sin\beta$$

$$c = 2R\sin\gamma .... \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} .... - теорема...синусов.$$



по теореме Пифагора имеем:

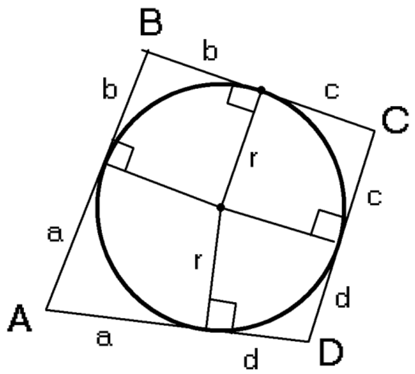
$$h^2 = c^2 - (c\cdot\cos\alpha)^2$$

$$h^2 = a^2 - (b - c\cdot\cos\alpha)^2$$

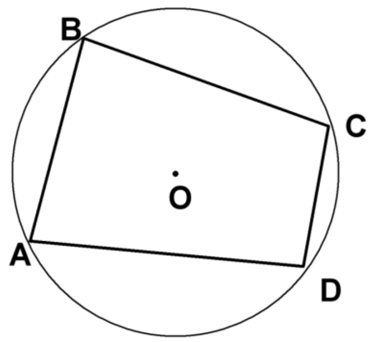
$$c^2 - (c\cdot\cos\alpha)^2 = a^2 - (b - c\cdot\cos\alpha)^2$$

Отсюда получаем теорему косинусов.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$$

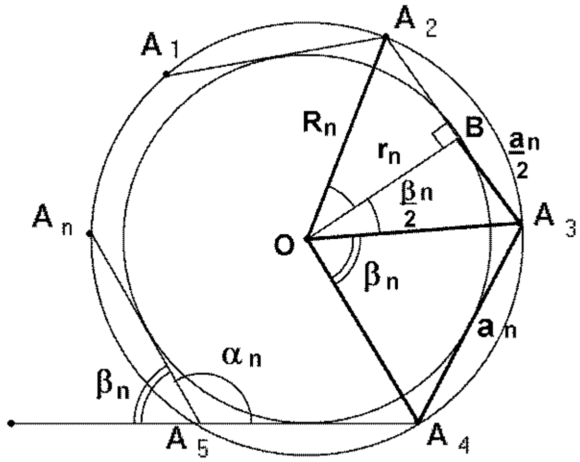


AB+CD=BC+AD



$\angle$ BAD + $\angle$ BCD = $\angle$ ABC + $\angle$ ADC

Правильные многоугольники



$S_{внутр.} = \alpha_n \cdot n$

$S_{внутр.} = (n-2)\cdot 180^o$ ____Формулы связи внутреннего угла с количеством сторон

$\Downarrow$

$$\alpha_n \cdot n = (n-2)\cdot 180^o$$
$$\alpha_n \cdot n = 180^o n - 360^o$$
$$\alpha_n = 180^o - \frac{360^o}{n} \quad \Rightarrow$$

$\Downarrow$

формула нахождения внутреннего угла правильного многоугольника через количество сторон (n)

$$\alpha_n = 180^o - \frac{360^o}{n}$$
$$\frac{360^o}{n} = 180^o - \alpha_n$$
$$n = \frac{360^o}{180^o - \alpha_n}$$

формула нахождения количества сторон (n) через внутренний угол правильного многоугольника .

$S_{внешн.} = \beta_n \cdot n$

$S_{внешн.} = 360^o$ __ Формула связи внешнего угла с количеством сторон (n)

$$\beta_n \cdot n = 360^o \Rightarrow \frac{\beta_n}{2} = \frac{180^o}{n}$$

Выражение стороны правильного многоугольника через радиус , описанной окружности .

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^o}{n}} \quad ; \quad a_n = 2R_n \sin\frac{180^o}{n}$$

Выражение стороны правильного многоугольника через радиус , вписанной окружности .

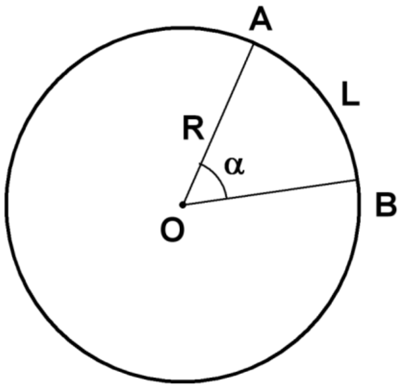
$$a_n = 2r_n tg\frac{180^o}{n} \quad ; \quad r_n = \frac{a_n}{2tg\frac{180^o}{n}}$$

$$r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^0}{n}$$

$P_n = a_n * n$ ___периметр правильного n-угольника

$S_n = \frac{1}{2}P_n * r_n$ ___площадь правильного n-угольника

Вычисление длины дуги окружности и площади кругового сектора



Дуга – часть окружности , на которую опирается центральный угол АОВ.

Опр. Радианной мерой угла называется отношение длины дуги , на которую опирается центральный угол , к радиусу окружности .

$$\alpha = \frac{L}{R} \Rightarrow \qquad L = \alpha \cdot R$$

Если $\alpha = 2\pi$, то длина окружности равна $C = 2\pi R$

Круговой сектор – часть круга , ограниченная окружностью и центральным углом.

Площадь круга $S = \pi R^2 = \frac{2\pi}{2} \cdot R^2$, где $\alpha = 2\pi$ радиан отсюда получаем общую формулу для вычисления площади кругового сектора .

$$S_{сектора} = \frac{\alpha}{2} \cdot R^2$$

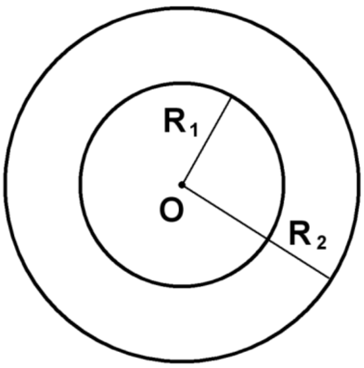
Теперь выразим длину дуги площадь сектора через градусную меру угла .
По формуле перехода радианной меры угла в градусную имеем

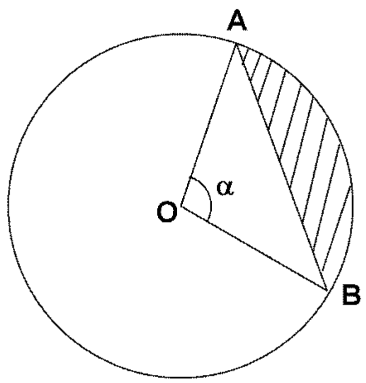
$$\alpha = \frac{\pi}{180^o} \cdot n....радиан$$, где n – градусная мера угла

Длина дуги $L = \frac{\pi R}{180^o} \cdot n$ Площадь сектора $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o} \cdot n$

Вычисление площади кольца

Найти площадь кольца , ограниченного двумя окружностями R_1 и R_2 , где $R_2 \rangle R_1$





$$S_{кольца} = S_2 - S_1 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$$

$$S_{кольца} = \pi(R_2^2 - R_1^2)$$

$$S_{сегмента} = S_{сектора} - S_{\Delta AOB}$$

Формулы для вычисления площадей выпуклых многоугольников

Площадь квадрата *, равна квадрату его стороны.*

$S = a^2 ......, где...a - сторона...квадрата$

Площадь прямоугольника *, равна произведению двух его измерений.*

S=a*b

Площадь параллелограмма *, равна произведению стороны на высоту , опущенную к этой стороне .*

$S = a \cdot h_a$ S=a*b*sin α $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$ $S_{ромба} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

$S = b \cdot h_b$

Площадь треугольника *, равна половине произведения основания на высоту , опущенную к этому основанию .*

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$ $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - формула...Герона;..где...p - полупериметр...p = \frac{a+b+c}{2}$

Площадь трапеции *, равна полусумме основании на высоту .*

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Площадь круга

$S_{круга} = \pi \cdot r^2 ......, где...r - радиус...круга$

Длина окружности

$C = 2 \cdot \pi \cdot r ......, где...r - радиус...окружности$

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

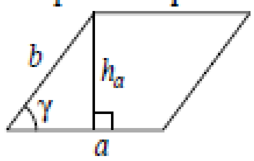
Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

	параллелограмм	прямо-угольник	ромб	квадрат
1. Противолежащие стороны параллельны и равны.	+	+	+	+
2. Все стороны равны.	-	-	+	+
3. Противолежащие углы равны, сумма соседних углов равна 180°.	+	+	+	+
4. Все углы прямые.	-	+	-	+
5. Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.	+	+	+	+
6. Диагонали равны.	-	+	-	+
7. Диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.	-	-	+	+

Площади фигур

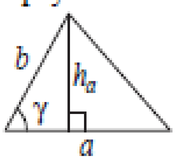
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

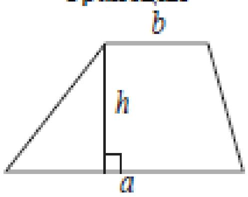
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

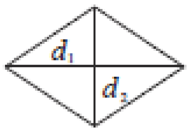
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



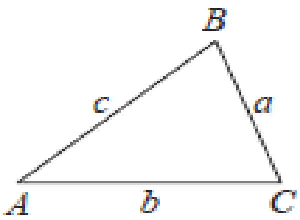
$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

Ромб



d_1, d_2 — диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$



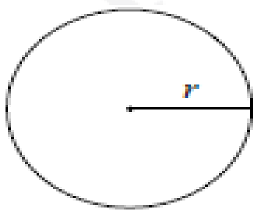
Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



Длина окружности $C = 2\pi r$

Площадь круга $S = \pi r^2$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

$\frac{\pi}{6} = 30^o$ $\frac{2\pi}{3} = 120^o$ $\frac{7\pi}{6} = 210^o$ $\frac{5\pi}{3} = 300^o$

$\frac{\pi}{4} = 45^o$ $\frac{3\pi}{4} = 135^o$ $\frac{5\pi}{4} = 225^o$ $\frac{7\pi}{4} = 315^o$

$\frac{\pi}{3} = 60^o$ $\frac{5\pi}{6} = 150^o$ $\frac{4\pi}{3} = 240^o$ $\frac{11\pi}{6} = 330^o$