

Орлов Б.С.

# Методы решения уравнений

ПОДГОТОВКА К АТТЕСТАЦИИ  
ПОДГОТОВКА К АТТЕСТАЦИИ  
в 9 классе

Предлагаемое учебное пособие позволяет подготовиться к сдаче единого государственного экзамена по математике. Пособие содержит примеры решений уравнений и систем уравнений.

Пособие предназначено учащимся старших классов средней школы и учителям.

### **Решение уравнения (нахождение корней уравнения)**

Уравнение – это равенство двух выражений с переменными .

Решить уравнение – найти корни данного уравнения или доказать , что их нет.

#### **1. Раскрыть скобки , если они имеются , применяя распределительное свойство**

$$a ( b + c ) = a b + a c$$

$$( a + b ) ( c + d ) = a c + a d + b c + b d$$

$$( a + b )^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$( a - b )^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$( a - b )( a + b ) = a^2 - b^2$$

$$( a + b )( a^2 - ab + b^2 ) = a^3 + b^3$$

$$( a - b )( a^2 + ab + b^2 ) = a^3 - b^3$$

#### **2. Корни уравнения не изменятся , если какое – нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую , изменяя при этом его знак .**

( Выражения с переменными собираем в одну сторону , числа в другую сторону , меняя знаки выражений и чисел при переходе через знак равенства . )

**Пример :**

$$3 ( 2 + 1,5 x ) = 0,5 x + 24$$

$$6 + 4,5 x = 0,5 x + 24$$

$$4,5 x - 0,5 x = 24 - 6$$

$$3 x = 18$$

$$x = 18 : 3$$

$$x = 6$$

**Ответ : 6**

**Пример:** вычислите координаты точек пересечения прямой  $5x + 7y = 105$  с осями координат.

**Решение :** 1) с осью ОХ точка ( 21 ; 0 )

$$y=0 ; 5x + 7 \cdot 0 = 105 \text{ отсюда } x = 21$$

2) с осью ОУ точка ( 0 ; 15 )

$$x=0 ; 5 \cdot 0 + 7y = 105 \text{ отсюда } y = 15$$

**Ответ:** с осью ОХ точка ( 21 ; 0 ) и с осью ОУ точка ( 0 ; 15 ).

#### **3. Корни уравнения не изменяются , если обе части уравнения умножить или разделить на одно и тоже число , не равное 0**

**Пример :**  $\frac{x-4}{4} - 2 = \frac{x}{2} \quad ! \cdot 4$

$$x - 4 - 8 = 2x$$

$$x - 2x = 8 + 4$$

$$-x = 12$$

$$x = -12$$

**Ответ : - 12**

**Решение рациональных уравнений .**

**Пример:**  $\frac{5}{1-x} = \frac{4}{3-x} \Leftrightarrow \frac{5^{(3-x)}}{1-x} - \frac{4^{(1-x)}}{3-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{15-5x-4+4x}{(1-x)(3-x)} = 0$   
 $11-x=0 \dots \dots \text{ОДЗ } (1-x)(3-x) \neq 0$   
 $x = 11$

**Ответ:** 11

**Пример :**  $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} = 5$   
 $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} - 5 = 0$       ОДЗ  $x(x+1) \neq 0$   
 $\frac{6x+6+6x-5x^2-5x}{x(x+1)} = 0$   
 $\frac{-5x^2+7x+6}{x(x+1)} = 0$   
 $-5x^2+7x+6=0$       разделим на  $-1$   
 $5x^2-7x-6=0$   
 $D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 49 + 120 = 169 > 0$   
 $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 5}$        $x_{1,2} = \frac{7 \pm 13}{10}$        $x_1 = -0,6$        $x_2 = 2$

**Ответ:** -0,6 и 2**Пример:**

$\frac{6}{1-2x} + \frac{9}{2x+1} = \frac{12x^2-15}{4x^2-1}$   
 $\frac{6}{1-2x} + \frac{9}{1+2x} + \frac{12x^2-15}{1-4x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6^{(1+2x)}}{1-2x} + \frac{9^{(1-2x)}}{1+2x} + \frac{12x^2-15}{(1-2x)(1+2x)} = 0$   
 $\frac{6+12x+9-18x+12x^2-15}{(1-2x)(1+2x)} = 0 \Leftrightarrow 12x^2-6x=0 \dots \dots \text{ОДЗ } (1-2x)(1+2x) \neq 0$   
 $6x(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \dots 2x-1 = 0$   
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots x = 0,5$        $x = 0,5$  не удовлетворяет условию ОДЗ.

**Ответ:** 0;

**Пример :** 
$$\frac{2}{x^2 - x - 12} + \frac{6}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{x + 3}$$

Разложим квадратные трехчлены на множители по формуле

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1 \dots x_2$  - корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \dots x_2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \dots x_2 = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

$$\frac{2}{(x + 3)(x - 4)} + \frac{6}{(x + 3)(x + 1)} - \frac{1}{x + 3} = 0$$

$$\frac{2(x + 1) + 6(x - 4) - 1(x - 4)(x + 1)}{(x + 3)(x - 4)(x + 1)} = 0 \quad \text{дробь равна 0, если числитель равен 0, а}$$

знаменатель не равен 0.

$$2x + 2 + 6x - 24 - x^2 + 4x - x + 4 = 0 \quad \text{О.Д.З. } (x + 3)(x - 4)(x + 1) \neq 0$$

$$-x^2 + 11x - 18 = 0$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = 11$$

$$x_1 \cdot x_2 = 18 \Rightarrow x_1 = 2 \dots x_2 = 9$$

Отсюда корни данного уравнения 2 и 9.

**Ответ:** 2 и 9.

**Пример :** Чему равно произведение корней уравнения  $\sqrt{2 - x^2}(2x^2 - 5x + 3) = 0$

**Решение:** Произведение равно нулю, если один из множителей равен 0.

$$\sqrt{2 - x^2} = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad ; \quad \text{ОДЗ } 2 - x^2 \geq 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2} \dots x_2 = \sqrt{2} \quad x_3 = 1 \dots x_4 = 1,5$$

ОДЗ удовлетворяют три корня и их произведение равно  $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = -2$

**Ответ:** - 2.

**Пример :**

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x - \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \quad \text{преобразуем выражение}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$$

$$2\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right) - 11\left(x - \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \quad \text{обозначим } x - \frac{1}{x} = t$$

$$2(t^2 + 2) - 11t + 8 = 0$$

Получаем квадратное уравнение  $2t^2 - 11t + 12 = 0$ , корни которого 4 и 1,5.

4

Отсюда 1)  $x - \frac{1}{x} = 4, x \neq 0$   
 $x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{5} \dots x_2 = 2 + \sqrt{5}$

2)  $x - \frac{1}{x} = 1,5, x \neq 0$   
 $x^2 - 1,5x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \dots x_2 = -0,5$

**Ответ:**  $2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}; 2; -0,5$ .

**Решение биквадратных уравнений**

**Пример :**

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$t_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4} \dots t_2 = \frac{5+3}{8} = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \dots x^2 = 1$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} \dots x_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \dots x_3 = -\sqrt{1} = -1 \dots x_4 = \sqrt{1} = 1$$

**Ответ :**  $-0,5 ; 0,5 ; -1 ; 1$ .

**Пример :**  $(x-4)^4 - 3(x-4)^2 - 4 = 0$

$$(x-4)^2 = t \dots (x-4)^4 = t^2$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow \text{по теореме Виета} \begin{matrix} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 \cdot t_2 = -4 \Rightarrow t_1 = 4 \dots t_2 = -1 \end{matrix}$$

Отсюда  $(x-4)^2 = 4 \dots (x-4)^2 = -1$  — не имеет..решения

$$\begin{matrix} x-2 = -\sqrt{4} \dots x-2 = \sqrt{4} \\ x-2 = -2 & x-2 = 2 \\ x = 0 & x = 4 \end{matrix}$$

Ответ: 0 ; 4 .

5

Пример :

$$(x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 17) = -60$$

$$x^2 + 4x = t \Rightarrow t(t - 17) = -60$$

$$t^2 - 17t + 60 = 0$$

$$t_1 + t_2 = 17$$

$$t_1 \cdot t_2 = 60 \Rightarrow t_1 = 12 \dots t_2 = 5$$

$$x^2 + 4x = 12 \dots x^2 + 4x = 5$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \dots x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -4 \dots x_3 + x_4 = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = -12 \Rightarrow x_1 = 2 \dots x_2 = -6 \dots x_3 \cdot x_4 = -5 \Rightarrow x_3 = 1 \dots x_4 = -5$$

Ответ : 2 ; -6 ; 1 ; -5 .

Пример :

$$x + \sqrt{x} - 20 = 0$$

$$\sqrt{x} = t \dots x = (\sqrt{x})^2 = t^2 \Rightarrow t^2 + t - 20 = 0$$

$$t_1 + t_2 = -1$$

$$t_1 \cdot t_2 = -20 \Rightarrow t_1 = -5 \dots t_2 = 4$$

$$\sqrt{x} = -5 \Rightarrow \text{не имеет смысла}$$

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

Ответ : 1

**Метод группировки при решении уравнений:**

Пример :

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\begin{array}{l} x + 3 = 0 \quad \text{или} \quad x - 2 = 0 \quad \text{или} \quad x + 2 = 0 \\ x = -3 \quad \quad \quad x = 2 \quad \quad \quad x = -2 \end{array}$$

Ответ : -3 ; -2 ; 2 .

Пример :  $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x^4 + 2x^2 + 1 + 3x^3 + 3x + x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + (x^2 + 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)(x^2 + 1 + 3x + 1) = 0$$

Произведение равно 0, если один из

$$(x^2 + 1)(x^2 + 3x + 2) = 0$$

6

множителей равен 0.  $x^2 + 1 \neq 0$ , решаем квадратное уравнение:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \text{По теореме Виета имеем} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = -1 \dots x_2 = -2 \end{cases}$$

**Ответ:** - 1 ; - 2.

### Решение систем уравнений

**Опр.** Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

#### **Методы решение систем уравнений .**

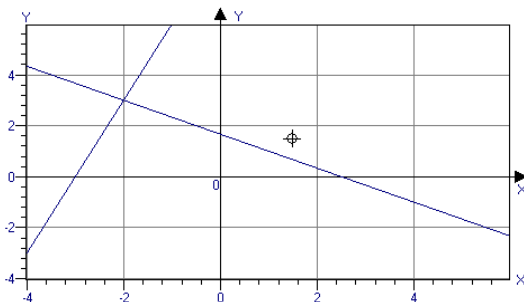
- 1) **графический** (строим графики уравнений системы, находим по графикам точки пересечения, координаты точек пересечения будут и решениями системы уравнений).

**Пример:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases} \quad \text{строим отдельно графики прямых } 2x + 3y = 5 \text{ и } 3x - y = -9$$

$$y = \frac{5 - 2x}{3}$$

$$y = 3x + 9$$



Строим графики данных функций в одной системе координат и находим координаты точек пересечения. В данном примере одна точка пересечения и его координаты равны  $x = -2$  и  $y = 3$ .

**Ответ :** ( - 2 ; 3 )

- 2) **метод подстановки** ( выражаем одну переменную через другую в одном из уравнении подставляем во второе уравнение и решаем полученное уравнение относительно одной переменной, найденное значение переменной подставляем во второе уравнение и находим вторую переменную .и записываем ответ )

Пример : решить систему уравнений



$$\begin{cases} 3x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 3x \\ -5x + 2y = 3 \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -5x + 2(7 - 3x) &= 3 \\ -5x + 14 - 6x &= 3 \\ -11x &= 3 - 14 \\ -11x &= -11 \end{aligned}$$

$$x = 1 \quad y = 7 - 3 \cdot 1 = 4$$

**Ответ :**  $x = 1 ; y = 4$

$$\begin{cases} 25 - x = -4y \Rightarrow x = 25 + 4y \\ 3x - 2y = 30 \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3(25 + 4y) - 2y &= 30 \\ 75 + 12y - 2y &= 30 \\ 10y &= 30 - 75 \\ 10y &= -25 \end{aligned}$$

$$y = -2,5 \quad x = 25 + 4 \cdot (-2,5) = 15$$

**Ответ:**  $x = 15 ; y = -2,5$

7

**3) метод сложения** ( умножаем обе части первого уравнения на одно число , обе части второго уравнения на другое число , эти два числа таковы , что при умножении их получаются одинаковые переменные с противоположными коэффициентами )

**Пример :** решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7a + 4b = 90 \cdot 5 \\ 5a - 6b = 20 \cdot (-7) \end{cases} + \begin{cases} 35a + 20b = 450 \\ -35a + 42b = -140 \end{cases} \quad \begin{cases} 62b = 310 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7a + 4 \cdot 5 &= 90 \\ 7a &= 90 - 20 \\ 7a &= 70 \\ a &= 10 \end{aligned}$$

**Ответ :**  $a = 10 \quad b = 5$

**Пример :** решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6y = -20 \cdot 2 \\ 9y + 2x = 25 \cdot (-5) \end{cases} + \begin{cases} 10x + 12y = -40 \\ -45y - 10x = -125 \end{cases} \quad \begin{cases} -33y = -165 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5x + 6 \cdot 5 &= -20 \\ 5x &= -20 - 30 \\ 5x &= -50 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

**Ответ :**  $x = -10 \quad y = 5$

**Пример :** вычислите координаты точек пересечения прямых

$$2x - 3y = 7 \quad \text{и} \quad 5x + 4y = 6$$

**Решение:** по условию координаты точек удовлетворяют обоим уравнениям, то есть являются решением системы данных уравнений.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \cdot 5 \\ 5x + 4y = 6 \cdot (-2) \end{cases} \quad \begin{cases} 10x - 15y = 35 \\ -10x - 8y = -12 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\cdot -23y = 23 \Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

$$10x - 15 \cdot (-1) = 35 \Rightarrow x = 2$$

**Ответ:**  $(2 ; -1)$ .

**Пример :**

Прямая  $y = kx + b$  проходит через точки  $A(-1; 3)$  и  $B(2; -1)$ . Напишите уравнение этой прямой.

**Решение:** подставляем в уравнение прямой значения координат заданных точек и получаем систему уравнений.

$$\begin{cases} 3 = k \cdot (-1) + b \\ -1 = k \cdot 2 + b \end{cases} \quad \begin{cases} -k + b = 3 \dots\dots\dots \\ 2k + b = -1 \Rightarrow b = -1 - 2k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -k + (-1 - 2k) = 3 \\ & -3k - 1 = 3 \\ & \dots -3k = 4 \\ & \dots k = -1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

8

$$-1 = -1\frac{1}{3} \cdot 2 + b$$

$$b = -1 + 2\frac{2}{3}$$

$$b = 1\frac{2}{3}$$

$y = kx + b$ ; подставляем значения  $k$  и  $b$ , и получаем

уравнение прямой :  $y = -1\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

**Ответ:**  $y = -1\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

**Пример:** решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - y^4 = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 5(x^2 - y^2) = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

Далее решаем методом сложения  $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \dots x_2 = 2$

Подставляем в 1-ое уравнение  $(-2)^2 + y^2 = 5$   
 $y^2 = 1 \Rightarrow y_1 = -1 \dots y_2 = 1$

$$2^2 + y^2 = 5$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow y_1 = -1 \dots y_2 = 1$$

Находим координаты точек пересечения  $(-2; -1)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(2; 1)$

**Ответ:**  $(-2; -1)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(2; 1)$

**Пример:**

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ (x^2 - y^2)(x - y) = 175 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ (x - y)(x + y)(x - y) = 175 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ (x - y)^2 \cdot 7 = 175 \end{cases}$$

$$(x - y)^2 = 25$$

$$x - y = -\sqrt{25} \dots \text{или} \dots x - y = \sqrt{25}$$

$$x - y = -5 \dots \dots \dots x - y = 5$$

Отсюда решаем две системы уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Решая методом сложения получаем:

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

подставляя в первое уравнение получаем:

$$\begin{aligned} 1 + y &= 7 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 + y &= 7 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

**Ответ :** (1;6) и (6;1)

Это же уравнение можно решить методом подстановки.

9

**Пример :**

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 9 \end{cases}$$

пусть  $\frac{1}{x} = u \dots \dots \frac{1}{y} = v$  получаем  $\begin{cases} 2u + v = 4 \Rightarrow v = 4 - 2u \\ u - 3v = 9 \dots \dots \dots \end{cases}$

$$\begin{aligned} u - 3(4 - 2u) &= 9 \\ u - 12 + 6u &= 9 \\ 7u &= 21 \\ u &= 3 \end{aligned}$$

$$v = 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\frac{1}{x} = 3$$

$$\frac{1}{y} = -2$$

подставляя значения u и v получаем :

$$x = \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

**Ответ:**  $(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$ .

### Решение систем уравнений второй степени

**Пример :**

$$\begin{cases} 2xy - y = 7 \dots \dots \dots \\ x - 5y = 2 \Rightarrow x = 2 + 5y \end{cases}$$

$$2y(2 + 5y) - y = 7$$

$$10y^2 + 3y - 7 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-7) = 289 > 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 10}$$

$$y_1 = \frac{-3 - 17}{20} = -1 \dots \dots \dots x_1 = 2 + 5 \cdot (-1) = -3$$

$$y_2 = \frac{-3 + 17}{20} = 0,7 \dots \dots \dots x_2 = 2 + 5 \cdot 0,7 = 5,5$$

**Ответ :** ( -3 ; -1 ) и ( 0,7 ; 5,5 )

**Пример :**

Вычислите координаты точек пересечения парабол:

$$y = 3x^2 - 8x - 2 \dots \dots \dots y = x^2 - 4$$

**Решение:**

Чтобы вычислить точки пересечения парабол , надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 8x - 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

10

$$3x^2 - 8x - 2 = x^2 - 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 = 12 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \dots \dots \dots x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$y_1 = (2 - \sqrt{3})^2 - 4 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 4 = 3 - 4\sqrt{3} \dots \dots \dots y_2 = (2 + \sqrt{3})^2 - 4 = 3 + 4\sqrt{3}$$

Отсюда точки пересечения парабол имеют соответствующие координаты .

**Ответ:** (2 - √3; 3 - 4√3) ... и ... (2 + √3; 3 + 4√3)

**Уравнения с параметрами:**

**Пример :** Найдите все значения **k** , при которых уравнение  $kx^2 - 6x + k = 0$  имеет два корня.

**Решение :** Уравнение имеет два корня , если  $D > 0$  . Найдем

$$-4 \cdot k^2 + 36 > 0$$

$$a = -4 < 0 \dots \text{ветви} \dots \text{вниз}$$

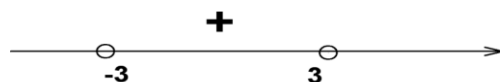
Найдем ... точки ... пересечения ... с ... осью ... OX  $\Rightarrow \left( 3; 0 \right) ; \left( 0; 0 \right)$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot k \cdot k = 36 - 4 \cdot k^2 \Rightarrow$$

$$-4 \cdot k^2 + 36 = 0$$

$$k^2 = 9$$

$$k_1 = -3 \dots \dots k_2 = 3$$



Ответ :  $k \in (-3; 3]$

**Пример 2:** При каком значении  $m$  уравнение  $x^3 + 6x^2 + mx = 0$  имеет два корня? Найдите эти корни.

**Решение:** Вынесем за скобки  $x$ , получаем  $x(x^2 + 6x + m) = 0$

Один из корней равен 0, тогда уравнение  $x^2 + 6x + m = 0$  имеет один корень при  $D=0$ , т.е.  $36 - 4m=0$ ,  $m=9$ .

Уравнение  $x^2 + 6x + 9 = 0$  имеет один корень равный -3.

**Ответ:** 0, - 3.

**Пример 3:** При каких значениях  $p$  корни уравнения  $x^2 - 2(p+1)x + p(p+2) = 0$  принадлежат промежутку  $[-1; 3]$

**Решение:** Определяем значения  $p$ , при которых данное уравнение имеет два корня.

$D = (-2(p+1))^2 - 4p(p+2) = 4p^2 + 8p + 4 - 4p^2 - 8p = 4 > 0$  при любых значениях  $p$

$$\text{Отсюда } x_{1,2} = \frac{2(p+1) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \quad x_{1,2} = \frac{2p+2 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = p \dots \dots \dots x_2 = p + 2$$

Тогда получаем систему неравенств  $\begin{cases} p \geq -1 \\ p + 2 \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} p \geq -1 \\ p \leq 1 \end{cases}$  отсюда  $p \in [-1; 1]$ , так

как  $p$  меньший корень, а  $p+2$  больший корень.

**Ответ:**  $p \in [-1; 1]$

**Пример 4:** При каких значениях  $b$  уравнение  $x^2 + 2(b+1)x + 9 = 0$ , имеет два различных положительных корня?

**Решение:** уравнение имеет два корня, значит дискриминант больше 0.

$$D = (2(b+1))^2 - 4 \cdot 9 = 4(b+1)^2 - 36 > 0$$

$\Rightarrow$  по...алгоритму...решения...неравенств...имеем... $b \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$

$$x_{1,2} = \frac{-2(b+1) \pm \sqrt{4(b+1)^2 - 36}}{2} = -(b+1) \pm \sqrt{(b+1)^2 - 9}$$

Так как по условию корни положительные, то

$$x_1 = -(b+1) - \sqrt{(b+1)^2 - 9} > 0 \quad x_2 = -(b+1) + \sqrt{(b+1)^2 - 9} > 0$$

Корни положительны, если  $b+1 < 0$  или  $b < -1$ , то  $-(b+1) \cdot \sqrt{(b+1)^2 - 9}$  тогда по условию примера имеем  $b \in (-\infty; -4)$

**Ответ:**  $b \in (-\infty; -4)$

**Пример 5:** при каких значениях  $k$  число 0 находится между корнями уравнения

$$x^2 - 4x + (2 - k)(2 + k) = 0?$$

**Решение:** Уравнение имеет два корня, если дискриминант больше 0.

$$D = 4^2 - 4(2 - k)(2 + k) = 16 - 16 + k^2 = k^2 > 0$$

Уравнение имеет два корня при любых значениях  $k$ .

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{k^2}}{2} \quad x_{1,2} = 2 \pm |k|$$

$$x_1 = 2 - |k| \quad x_2 = 2 + |k|$$

По условию корни имеют разные знаки, отсюда  $|k| > 2$ .

**Ответ:**  $k < -2$  и  $k > 2$ .