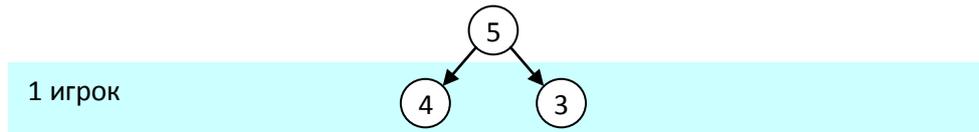


## 26 (С3) (высокий уровень, время – 30 мин)

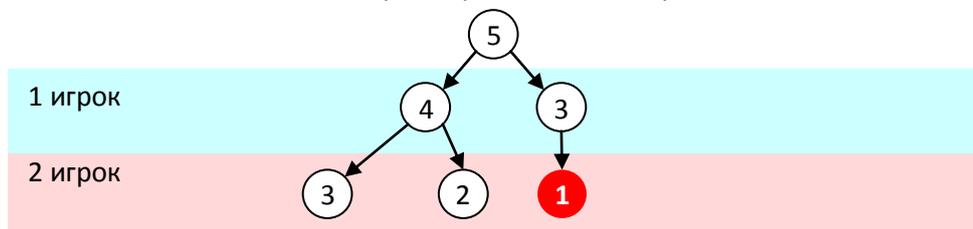
**Тема:** Дерево игры. Поиск выигрышной стратегии.

**Что нужно знать:**

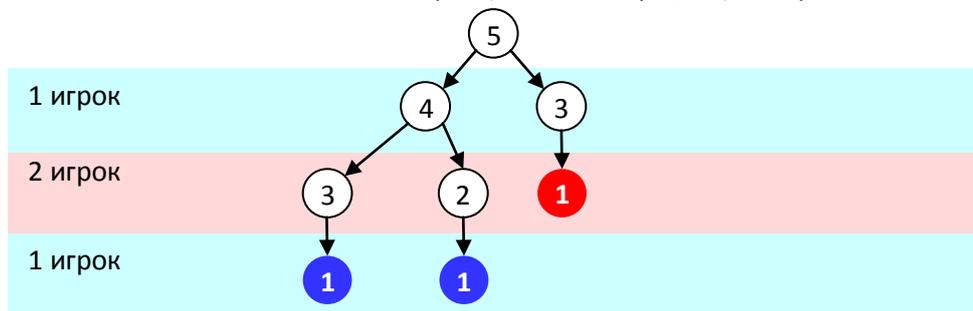
- в простых играх можно найти выигрышную стратегию, просто перебрав все возможные варианты ходов соперников
- для примера рассмотрим такую игру: сначала в кучке лежит 5 спичек; два игрока убирают спички по очереди, причем за 1 ход можно убрать 1 или 2 спички; выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 спичку
- первый игрок может убрать одну спичку (в этом случае их останется 4), или сразу 2 (останется 3), эти два варианта можно показать на схеме:



- если первый игрок оставил 4 спички, второй может своим ходом оставить 3 или 2; а если после первого хода осталось 3 спички, второй игрок может выиграть, взяв две спички и оставив одну:



- если осталось 3 или 2 спички, то 1-ый игрок (в обеих ситуациях) выигрывает своим ходом:



- простроенная схема называется «деревом игры», она показывает все возможные варианты, начиная с некоторого начального положения (для того, чтобы не загромождать схему, мы не рисуем другие варианты, если из какого-то положения есть выигрышный ход)
- в любой ситуации у игрока есть два возможных хода, поэтому от каждого узла этого дерева отходят две «ветки», такое дерево называется *двоичным* (если из каждого положения есть три варианта продолжения, дерево будет *троичным*)
- проанализируем эту схему; если первый игрок своим первым ходом взял две спички, то второй сразу выигрывает; если же он взял одну спичку, то своим вторым ходом он может выиграть, независимо от хода второго игрока
- кто же выигрывает при правильной игре? для этого нужно ответить на вопросы: 1) «Может ли первый игрок выиграть, независимо от действий второго?», и 2) «Может ли второй игрок выиграть, независимо от действий первого?»
- ответ на первый вопрос – «да»; действительно, убрав всего одну спичку первым ходом, 1-ый игрок всегда может выиграть на следующем ходу
- ответ на второй вопрос – «нет», потому что если первый игрок сначала убрал одну спичку, второй всегда проиграет, если первый не ошибется

- таким образом, при правильной игре выиграет первый игрок; для этого ему достаточно первым ходом убрать всего одну спичку
- в некоторых играх, например, в рэндзю (крестики-нолики на бесконечном поле) нет выигрышной стратегии, то есть, при абсолютно правильной игре обоих противников игра бесконечна (или заканчивается ничьей); кто-то может выиграть только тогда, когда его соперник по невнимательности сделает ошибку
- полный перебор вариантов реально выполнить только для очень простых игр; например, в шахматах сделать это за приемлемое время не удастся (дерево игры очень сильно разветвляется, порождая огромное количество вариантов)
- все позиции в простых играх делятся на выигрышные и проигрышные
- **выигрышная позиция** – это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если не сделает ошибку; при этом говорят, что у него есть выигрышная стратегия – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть
- если игрок начинает играть в **проигрышной** позиции, он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его соперник; в этом случае говорят, что у него нет выигрышной стратегии; таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для соперника
- выигрышные и проигрышные позиции можно охарактеризовать так:
  - позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции – **проигрышная**;
  - позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведет в проигрышную позицию – **выигрышная**, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

### Пример задания:

**Р-05.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 24. Если при этом в куче оказалось не более 38 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче был 21 камень и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 < S < 23$ .

**Задание 1.** а) При каких значениях числа  $S$  Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при  $S = 22, 21, 20$ ? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

**Задание 2.** У кого из игроков есть выигрышная стратегия при  $S = 11, 10$ ? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

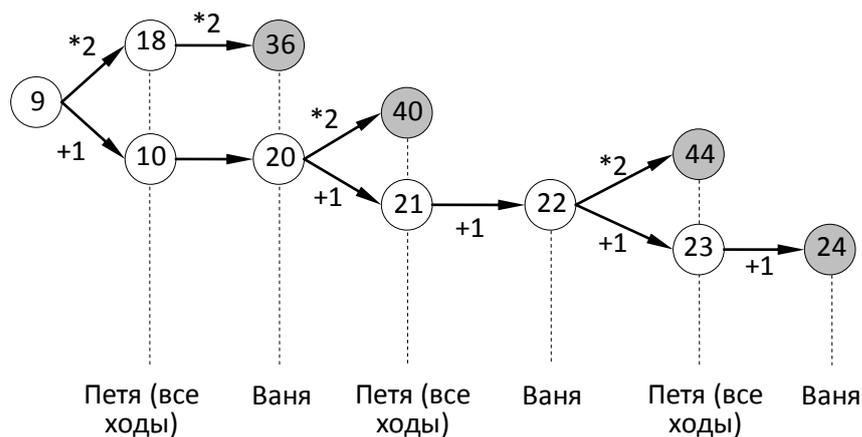
**Задание 3.** У кого из игроков есть выигрышная стратегия при  $S = 9$ ? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

### Решение:

- 1) **Задание 1а.** Сложность состоит в том, что Петя проиграет, если в результате его хода количество камней станет больше, чем 38. Он может сделать ход «+1» или «\*2». Ходом «+1» он сможет получить 24 камня в куче (и таким образом выиграет!) из позиции  **$S = 23$** .

Теперь проверим ход «\*2». Для выигрыша Пети количество камней в результате этого хода должно стать от 24 до 38, поэтому Петя выиграет этим ходом **при S от 12 до 19**.

- 2) **Задание 16.** При  $S = 22$  возможные ходы дают кучи в 23 и 44 камня. В первом случае ( $S = 23$ ) противник оказывается в выигрышной позиции (см. предыдущий пункт), во втором случае тот, кто ходит, проигрывает, потому что  $44 > 38$ . Поэтому позиция  $S = 22$  – проигрышная, Петя проиграет, у **Вани** есть выигрышная стратегия: в случае  $S = 23$  сделать ход «+1».
- При  $S = 21$  Петя может перевести игру в позицию  $S = 22$ , она, как мы только что показали, проигрышная для Вани. Поэтому у **Пети** есть выигрышная стратегия.
- При  $S = 20$  ходом «+1» Петя переведет игру в выигрышную (для Вани) позицию, а при ходе «\*3» он сразу проиграет, получив  $40 > 38$  камней. Поэтому выигрышная стратегия есть у **Вани**.
- 3) **Задание 2.** При  $S = 11$  или  $S = 10$  Петя может ходом «\*2» перевести игру в позиции  $S = 22$  и  $S = 20$ , обе они, как мы показали в предыдущем пункте, проигрышные. Поэтому выигрышную стратегию имеет **Петя**.
- 4) **Задание 3.** При  $S = 9$  возможно 2 хода: ход «+1» приводит к позиции  $S = 10$ , она выигрышная (см. предыдущий пункт); ход «\*2» приводит к позиции  $S = 18$ , она тоже выигрышная (см. первый пункт). Таким образом, все возможные ходы ведут в выигрышные для соперника позиции, и позиция  $S = 9$  – проигрышная (для Пети). Выигрышную стратегию имеет Ваня. При построении дерева для проигрывающего (Пети) указываем все возможные ходы, а для выигрывающего (Вани) – только один выигрышный ход. Дерево можно нарисовать так:



или записать в виде таблицы

	Петя	Ваня	Петя	Ваня	Петя	Ваня
9	$9*2=18$	$18*2=36$				
	$9+1=10$	$10*2=20$	$20*2=40$			
			$20+1=21$	$21+1=22$	$22+1=23$	$23+1=24$
					$22*2=44$	

### Ещё пример задания:

**P-04.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 7)$ ,  $(20, 7)$ ,  $(10, 8)$ ,  $(10, 14)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 73. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 73 камня или больше.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (6, 34), (7, 33), (9, 32) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

### Задание 1

Для каждой из начальных позиций (6, 33), (8, 32) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

### Задание 2

Для каждой из начальных позиций (6, 32), (7, 32), (8, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

### Задание 3

Для начальной позиции (7, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

### Решение:

- 5) **Задание 1.** Из всех заданных начальных позиций минимальное количество камней в первой куче – 6. Если во второй куче было  $S$  камней, то после первого хода Пети количество камней в двух кучах может стать равным

$$7+S \text{ (после добавления 1 камня в любую кучу)}$$

$$12+S \text{ (после удвоения первой кучи)}$$

$$6+2S \text{ (после удвоения второй кучи)}$$

Выписываем условия выигрыша на первом ходу для всех трёх вариантов

$$7 + S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 66$$

$$12 + S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 61$$

$$6 + 2S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 34$$

Отсюда следует, что при  $S \geq 34$  Петя выигрывает первым же ходом, удвоив число камней во второй куче.

- 6) Составим таблицу выигрышных и проигрышных позиций. По вертикали будем откладывать количество камней в первой куче, а по горизонтали – во второй (там больше!). Зеленым фоном отметим выигрышные позиции:

	31	32	33	34	35	36
6						

- 7) аналогично для 7 камней в первой куче цепочка выигрышных позиций начинается с (7,33):

$$7 + 2S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 33$$

	31	32	33	34	35	36
6						
7						

для 8 камней – тоже с 33, а для 9 – с 32:

	31	32	33	34	35	36
6						
7						

8						
9						

- 8) Теперь рассмотрим «угловые» клетки: (6,33) и (8,32)  
 9) Все возможные ходы из (6,33) ведут в выигрышные позиции (выделены зеленым фоном):  
 (7,33) (6,34) (14,33) и (6,66)

Поэтому позиция (6,33) – проигрышная.

- 10) Все возможные ходы из (8,32) ведут в выигрышные позиции (выделены зеленым фоном):  
 (9,32) (8,33) (18,32) и (8,64)

Поэтому позиция (8,32) – проигрышная.

Получается такая таблица:

	31	32	33	34	35	36
6						
7						
8						
9						

- 11) Таким образом, ответ на задание 1: в позициях (6,33) и (8,32) Петя (ходящий первым) проигрывает, а Ваня (второй) имеет выигрышную стратегию: при любом первом ходе Пети удвоить количество камней во второй куче. Обоснование приведено в пп. 5 и 6 выше.  
 12) **Задание 2.** В каждой из начальных позиций (6, 32), (7, 32), (8, 31) есть ход в проигрышную позицию:

$$(6,32) \rightarrow (6,33) \quad (7,32) \rightarrow (8,32) \quad (8,31) \rightarrow (8,32)$$

это значит, что Петя (первый ходящий) во всех случаях может перевести игру в проигрышную (для Вани позицию), а затем, после любого хода Вани ему достаточно удвоить количество камней во второй куче, и он выиграет.

Получается такая таблица:

	31	32	33	34	35	36
6						
7						
8						
9						

- 13) **Задание 3.** В позиции (7,31) существует 4 возможных хода:

$$(8,31) \quad (7,32) \quad (14,31) \quad (7,62)$$

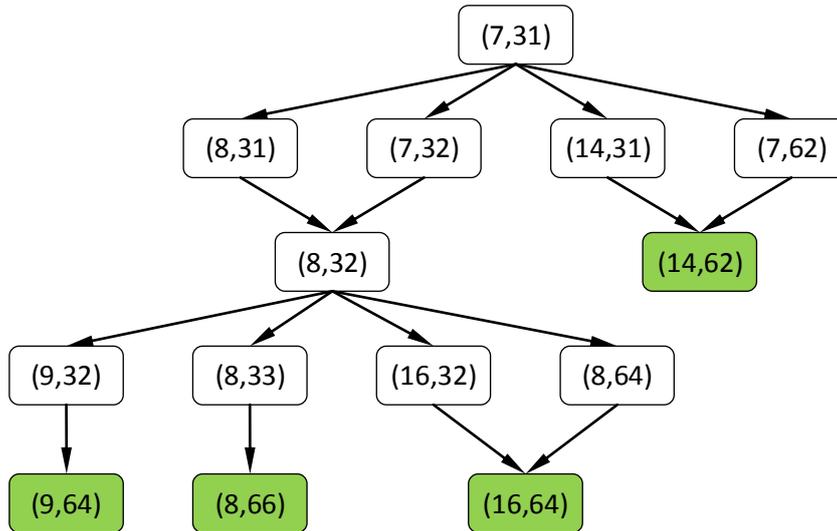
все эти позиции – выигрышные, поэтому Петя (первый ходящий) проиграет, а Ваня имеет выигрышную стратегию. Она заключается в том, чтобы своим первым ходом перевести игру в проигрышную (для Пети) позицию (8,32):

$$(8,31) \rightarrow (8,32) \quad (7,32) \rightarrow (8,32)$$

или вообще сразу выиграть:

$$(14,31) \rightarrow (14,62) \quad (7,62) \rightarrow (14,62)$$

- 14) Остается построить дерево возможных партий. Важно, что для проигрывающего (Пети) нужно обязательно рассмотреть все возможные ходы (чтобы доказать, что его ничто не может спасти), а для выигрывающего достаточно указать на каждом шаге один выигрывающий ход:



То же решение в виде таблицы

Начало	Петя	Ваня	Петя	Ваня
(7, 31)	(8, 31)	(8, 32)	(9, 32)	(9, 64)
	(7, 32)		(8, 33)	(8, 66)
	(14, 31)		(16, 32)	(16, 64)
	(7, 62)	(8, 64)	(8, 64)	(16, 64)
			(14, 62)	

### Ещё пример задания:

**Р-03.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 7)$ ,  $(20, 7)$ ,  $(10, 8)$ ,  $(10, 14)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее **55**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 55 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было **5** камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 49$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

#### Задание 1

а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Петя может выиграть за один ход, и соответствующие выигрышающие ходы. Если при некотором значении  $S$  Петя может выиграть несколькими способами, достаточно указать один выигрышающий ход.

б) Сколько существует значений  $S$ , при которых Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом?

#### Задание 2

Укажите такое значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

### Задание 3

Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рисунке на рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

### Решение:

15) **Задание 1а.** В этом задании начальная позиция –  $(5, S)$ , и у Пети есть один ход. После этого хода количество камней в двух кучах может стать равным

$6+S$  (после добавления 1 камня в любую кучу)

$10+S$  (после удвоения первой кучи)

$5+2S$  (после удвоения второй кучи)

Выписываем условия выигрыша на первом ходу для всех трёх вариантов

$$6 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 49$$

$$10 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 45$$

$$5 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 25$$

Отсюда следует, что при  $S \geq 25$  Петя выигрывает первым же ходом, удвоив число камней во второй куче.

Для дальнейшего анализа составим таблицу, где по вертикали будем отмечать количество камней в первой куче, а по горизонтали – во второй:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5							А		

Например, ячейка, отмеченная буквой А, соответствует позиции  $(5, 25)$ . Это выигрышная позиция, все выигрышные позиции отмечены зелёным цветом. Если во второй куче 6 камней (вторая строка), выигрышная позиция определяется условием

$$6 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad 2S \geq 49 \quad \Rightarrow \quad S \geq 25 \text{ (так же, как и для } (5, S)\text{)!}$$

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5									
6									

Если во второй куче 7 камней (третья строка), получаем

$$7 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad 2S \geq 48 \quad \Rightarrow \quad S \geq 24$$

и так далее:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									

Теперь попробуем найти **проигрышные позиции** – такие позиции, из которых все ходы ведут в выигрышные позиции (отмеченные зелёным фоном). Ход «+1» смещает позицию в таблице

на одну клетку вправо или вниз, а ход «\*2» – на соответствующее число клеток вправо или вниз. Очевидно, что все позиции в углах зелёной лесенки – проигрышные. На рисунке показаны все ходы из позиции (6,24), все они ведут в зелёные ячейки:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5									48
6									
7						7			
8									
9									
10									
11									
12						12			
13									

Далее: выигрышными (за 2 хода) будут все позиции, из которых есть ход хотя бы в одну проигрышную позицию:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5				2		2			
6			2		2				
7		2			2				
8	2			2					
9				2					
10			2						
11			2						
12		2							
13		2							

16) **Задание 16.** Как мы уже знаем, после первого хода Петя может получить количество камней  $6+S$ ,  $10+S$  и  $5+2S$ , но выиграть он не должен, то есть

$$6 + S < 55 \quad \Rightarrow \quad S < 49$$

$$10 + S < 55 \quad \Rightarrow \quad S < 45$$

$$5 + 2S < 55 \quad \Rightarrow \quad S < 25$$

Самое сильное условие –  $S < 25$ . Теперь ходит Ваня, у него на каждый ход Пети есть 4 варианта ответа. Рассмотрим первый возможный ход Пети и все возможные ответы Вани:

$$(6, S) \rightarrow (7, S) \text{ или } (6, S+1) \text{ или } (12, S) \text{ или } (6, 2S)$$

На каждый ход Пети у Вани должен быть выигрышный ход. Для хода Пети  $(6, S)$  получаем условия

$$7 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 48$$

$$12 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 43$$

$$6 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 25$$

Таким образом, при ходе Пети  $(6, S)$  Ваня может гарантированно выиграть только при  $S \geq 25$ , но в этом случае Петя и сам может выиграть своим первым ходом! Поэтому значений  $S$ , удовлетворяющих условию 16, нет! Остальные варианты первого хода Пети можно уже не проверять.

Заметим, что позиция  $(6, 24)$  – проигрышная, потому что выиграть одним ходом из неё нельзя (лучший ход – удвоение второй кучи – даёт в сумме 54 камня!), но любой ход из неё ведёт к выигрышной позиции.

Если смотреть на построенную таблицу, в первой строке (для позиций, в которых в первой куче 5 камней) нет чёрной клетки между выигрышем в один ход (позиция  $(5, 25)$ ) и выиг-

рышем в 2 хода (позиция (5,24)). Заметим, что это произошло потому, что в позиции (5,24) возможен «выжидающий» ход в проигрышную позицию (6,24).

- 17) **Задание 2.** Поскольку Петя не может выиграть за 1 ход, имеем  $S < 25$ . Как мы выяснили в предыдущем пункте, позиция (6,24) – проигрышная. Поэтому ответ на это задание – такое значение  $S$ , что у Пети есть ход, который переводит игру в позицию (6,24).

Действительно, начав с позиции (5,24), Петя может перевести игру в проигрышную позицию (6,24), в которой Ваня не может выиграть одним ходом, но всегда создаст Пете выигрышную позицию на втором ходу.

При  $S = 24$  Петя не может выиграть за один ход, но может выиграть за два. Для этого ему нужно добавить 1 камень в первую кучу, получив позицию (6,24), которая является проигрышной. Для любого хода Вани в этой позиции есть выигрышный второй ход Пети – удвоение второй кучи:

(6, 24) → Ваня: (7,24) → Петя: (7,48)

(6, 24) → Ваня: (6,25) → Петя: (6,50)

(6, 24) → Ваня: (12,24) → Петя: (12,48)

(6, 24) → Ваня: (6,48) → Петя: (6,96)

Возможен и другой ответ на этот вопрос. Дело в том, что при  $S = 22$  Петя своим первым ходом тоже может получить проигрышную (для Вани) позицию, только другую: (10,22).

При  $S = 22$  Петя не может выиграть за один ход, но может выиграть за два. Для этого ему нужно удвоить число камней в первой куче, получив позицию (10,22), которая является проигрышной. Для любого хода Вани в этой позиции есть выигрышный второй ход Пети – удвоение второй кучи:

(10, 22) → Ваня: (11,22) → Петя: (11,44)

(10, 22) → Ваня: (10,23) → Петя: (10,46)

(10, 22) → Ваня: (20,22) → Петя: (20,44)

(10, 22) → Ваня: (10,44) → Петя: (10,88)

- 18) **Задание 3.** Нам нужно найти такое значение  $S$ , что из начальной позиции (5, $S$ ) ЛЮБОЙ ход Пети ведёт в выигрышную (для Вани) позицию. Попробуем первое нерассмотренное значение,  $S = 23$ . Возможные ходы Пети:

(6,23), (5,24), (10,23) и (5,46)

В первых двух случаях Ваня своим ходом сведет игру в проигрышную (для Пети) позицию (6,24) и выиграет своим вторым ходом, а в последних двух случаях выиграет на первом же ходу, удвоив число камней во второй куче.

Ещё легче определить нужный ход по таблице. Все клетки в углах новой лесенки – это проигрышные позиции, потому что все ходы из них ведут на зелёные клетки:

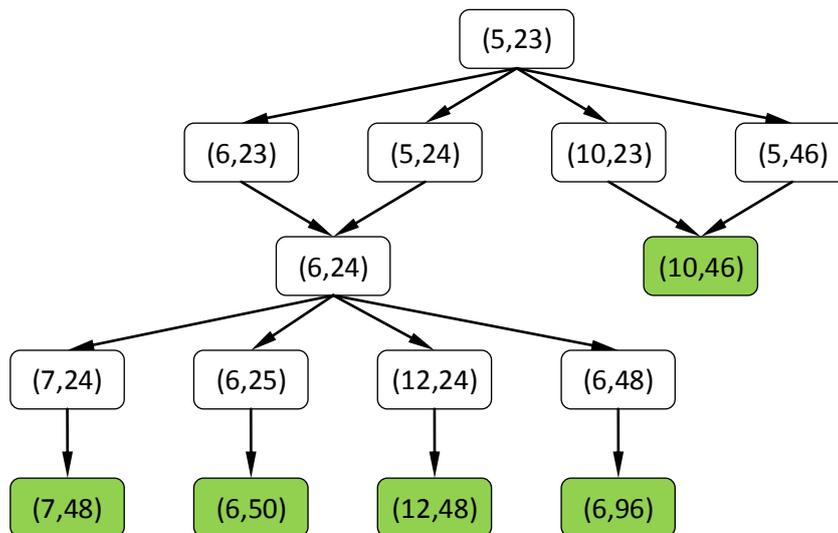
	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5			2	2	2	2			
6		2	2		2				
7	2	2		2	2				
8	2			2					
9			2	2					
10			2						
11		2	2						
12		2							
13	2	2							

На этом можно остановиться, потому что по условию задачи нас интересуют только позиции с выигрышем в 1 или 2 хода (позиции в остальных клетках требуют для выигрыша больше двух ходов). Смотрим на верхнюю строку: при  $S=21$  и  $S=23$  позиция проигрышная за 2 хода, это и есть два возможных ответа на вопрос 3.

Для  $S = 23$  у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, но у него нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Все возможные ходы Пети и выигрышные ответы Вани приведены в таблице:

Начало	Петя	Ваня	Петя	Ваня
(5, 23)	(6, 23)	(6, 24)	(7, 24)	(7, 48)
			(6, 25)	(6, 50)
	(5, 24)		(12, 24)	(12, 48)
			(6, 48)	(6, 96)
	(10, 23)		(10, 46)	(5, 46)

Вместо таблицы можно построить аналогичное дерево (конечно, это не совсем дерево, но для упрощения схемы можно объединить две ветки к узлу (6,24), а также две ветки к узлу (10,46)):



Возможен и другой ответ на этот вопрос. При  $S=21$  у Вани тоже есть выигрышная стратегия, он выигрывает на первом или на втором ходу.

Начало	Петя	Ваня	Петя	Ваня	
(5, 21)	(10, 21)	(10, 22)	(11, 22)	(11, 44)	
			(10, 23)	(10, 46)	
			(20, 22)	(20, 44)	
	(5, 22)		(10, 44)	(10, 88)	
			(13, 21)	(13, 42)	
	(6, 21)		(12, 22)	(12, 44)	
			(24, 21)	(24, 42)	
			(12, 42)	(12, 84)	
	(5, 42)		(5, 84)		

### Ещё пример задания:

**P-02.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 34$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сде-

лать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

### Задание 1

а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения  $S$ , и укажите выигрывающие ходы.

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

### Задание 2

Укажите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для каждого указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

### Задание 3

Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рисунке на рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

### Решение (способ 1, таблица):

- 1) **Задание 1а.** Последним ходом может быть «+1», «+3» или «\*2». Выиграть последним ходом «+1» можно, если  $S = 34$ . Ходом «+2» можно выиграть при  $S=32$ ,  $S=33$  и  $S=34$ . Ходом «\*2» можно выиграть из любой позиции при  $S > 17$ . Можно составить таблицу, в которой « $B_1$ » обозначает выигрыш за один ход:

$S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...	34
																		$B_1$	$B_1$	...	$B_1$

Поэтому ответ должен быть такой:

**Задание 1а.** Петя может выиграть за один ход при любом  $S > 17$ . Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 36 камней.

- 2) **Задание 1б.** Ваня может выиграть в один ход тогда, когда все ходы Пети из текущей позиции ведут в выигрышные позиции. Это будет при  $S = 17$ :

**Задание 1б.** Ваня может гарантированно выиграть своим первым ходом при  $S = 17$ . В этом случае Петя своим первым ходом может получить в куче 18, 19 или 34 камня, то есть, выиграть за один ход не может. В любой из этих позиций Ваня выигрывает своим первым ходом, удваивая количество камней.

Позицию  $S = 17$  отмечаем в таблице как проигрышную (за 1 ход):

$S$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...	34
																	$P_1$	$B_1$	$B_1$	...	$B_1$

- 3) Для того, чтобы Петя смог выиграть своим вторым ходом, ему нужно своим первым ходом перевести игру в проигрышную (для Вани) позицию, то есть, получить 17 камней. Он может сделать это при  $S = 14$  (ходом «+3») или при  $S = 16$  (ходом «+1»).

**Задание 2.** При  $S = 14$  или  $S = 16$  Петя своим первым ходом может получить 17 камней, переведя игру в проигрышную (для Вани) позицию. Поэтому своим вторым ходом Петя всегда выигрывает.

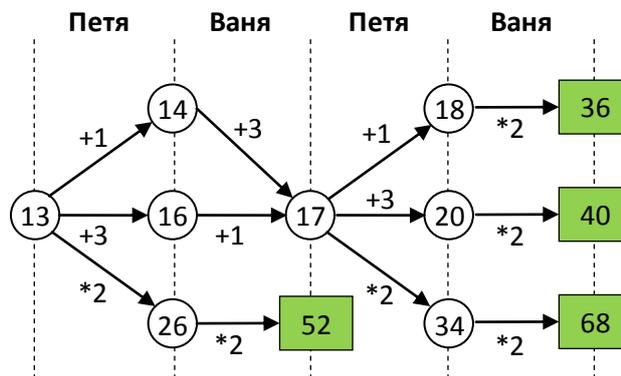
В таблице обозначим эти позиции как выигрышные (за 2 хода):

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...	34
														$B_2$		$B_2$	$P_1$	$B_1$	$B_1$	...	$B_1$

- 4) для выполнения задания № 3 нужно найти такие позиции, из которых **все возможные ходы** ведут в выигрышные позиции, помеченные как  $B_1$  или  $B_2$ ; это позиции  $S = 13$  и  $S = 15$ : при  $S = 13$  можно получить 14, 16 или 26 камней, все эти позиции выигрышные; при  $S = 15$  можно получить 16, 18 или 30 камней, это так же выигрышные позиции
- 5) В задании требуется найти только одну подходящую позицию, выбираем  $S = 13$ .

**Задание 3.** При  $S = 13$  после первого хода Пети в куче будет 14, 16, или 26 камней. Если в куче получилось 14 или 16 камней, Ваня выиграет своим вторым ходом (см. задание 2). Если получилось 26 камней, Ваня выигрывает первым ходом, удвоив количество камней.

Строим дерево игры, рассматривая на каждом шаге **все возможные ходы Пети** и **только выигрышный ход Вани**:



У нас получилось не совсем дерево, потому что на первом ходу Ваня из двух позиций ( $S=14$  и  $S=16$ ) приводит игру к проигрышной для Пети позиции  $S=17$ . Для сокращения записи можно привести стрелки в один узел. Зелёные прямоугольники обозначают выигрыш Вани.

### Ещё пример задания:

Здесь и в задачах для тренировки условие записано в сокращенном виде для экономии места. Полную форму записи условия см. в первой разобранный задаче.

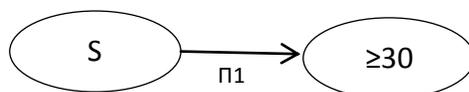
**P-01.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. При каких  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

**Решение (способ 2, математический, Г. Сергеев, г. Москва):**

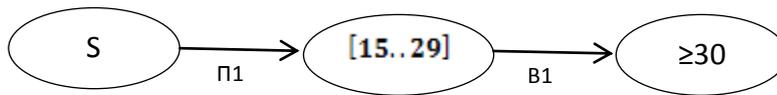
- 1) **Вопрос 1а.** Петя выигрывает первым ходом:



Петя должен правильно выбрать один из трёх возможных вариантов действий (+1 **или** +3 **или** \*2), которое переведет кучу камней к состоянию  $\geq 30$ . Таким образом, получаем совокупность неравенств:

$$\begin{cases} S + 1 \geq 30 \\ S + 3 \geq 30 \\ S * 2 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \geq 29 \\ S \geq 27 \\ S \geq 15 \end{cases} \Rightarrow S \in [15..29]$$

- 2) **Вопрос 16.** Ваня выигрывает первым ходом



Любое действие Пети (**и** +1 **и** +3 **и** \*2) должно привести кучу камней к состоянию  $S \in [15..29]$ . Только это может обеспечить выигрыш Вани на следующем ходу. Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} S + 1 \in [15..29] \\ S + 3 \in [15..29] \\ S * 2 \in [15..29] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [14..28] \\ S \in [12..26] \\ S \in [8..14] \end{cases} \Rightarrow S \in [14]$$

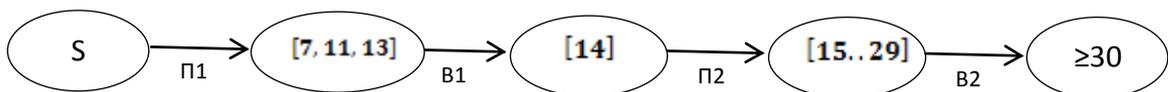
- 3) Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?



Петя должен выиграть, а это значит, он должен правильно выбрать один из трёх возможных вариантов действий (+1 **или** +3 **или** \*2), которое переведет кучу камней к состоянию  $S \in [14]$ . Только это может обеспечить ему выигрыш при любом действии его противника Вани. Таким образом, получаем совокупность:

$$\begin{cases} S + 1 \in [14] \\ S + 3 \in [14] \\ S * 2 \in [14] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [13] \\ S \in [11] \\ S \in [7] \end{cases} \Rightarrow S \in [7, 11, 13]$$

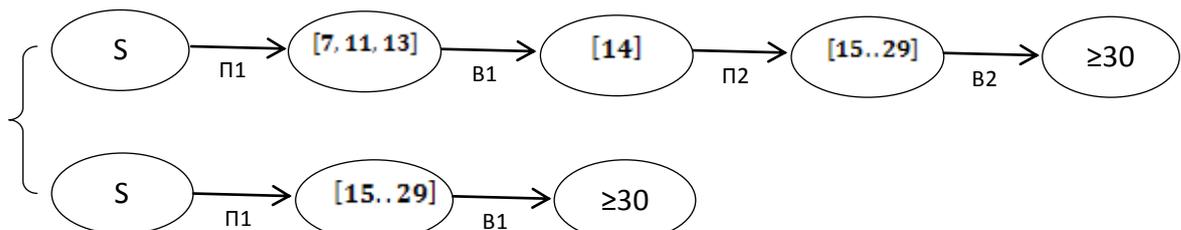
- 4) **Вопрос 3.** При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?  
Сначала найдем, при каком S Ваня выигрывает своим вторым ходом.



$$\begin{cases} S + 1 \in [7, 11, 13] \\ S + 3 \in [7, 11, 13] \\ S * 2 \in [7, 11, 13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [6, 10, 12] \\ S \in [4, 8, 10] \\ S \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow S \in \emptyset$$

Таким образом, получаем, что нет такого количества камней S, которые гарантировали бы выигрыш Вани именно после его второго хода при любых действиях Пети.

- 5) Найдем, при каких значениях S любое действие Пети приведет кучу камней к такому состоянию, при котором Ваня сможет выиграть после 1 или после второго хода:



- 6) Составим систему на основе следующих условий:

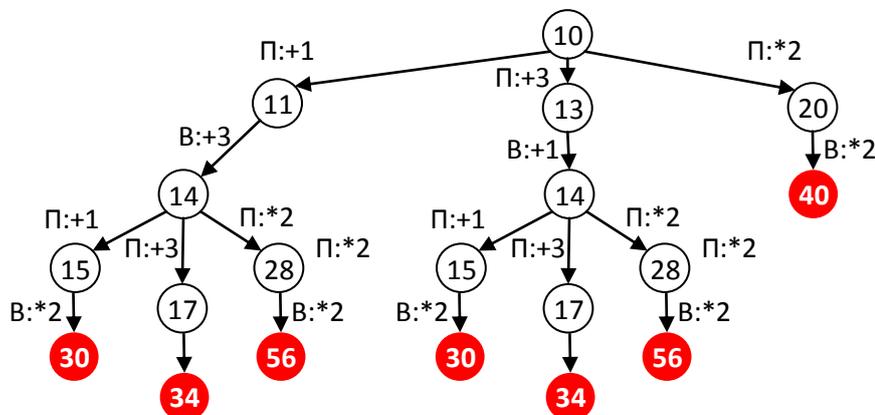
- а. любой ход Пети ведет в позицию выигрыша в два хода ( $[7, 11, 13]$ ) или в один ход ( $[15..29]$ )

b. текущая позиция не совпадает с проигрышной позицией в один ход ( $S \notin [14]$ ), иначе, кроме нужных значений  $S$ , мы здесь получим ещё ответ на вопрос 16

$$\begin{cases} [S + 1 \in [7, 11, 13] \\ [S + 1 \in [15..29] \\ [S + 3 \in [7, 11, 13] \\ [S + 3 \in [15..29] \\ [S * 2 \in [7, 11, 13] \\ [S * 2 \in [15..29] \\ S \notin [14] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [S \in [6, 10, 12] \\ [S \in [14..28] \\ [S \in [4, 8, 10] \\ [S \in [12..26] \\ [S \in \emptyset \\ [S \in [8..14] \\ S \notin [14] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [6, 10, 12, 14..28] \\ S \in [4, 8, 10, 12..26] \\ S \in [8..14] \\ S \notin [14] \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} S \in [10, 12, 14] \\ S \notin [14] \end{cases} \Rightarrow S \in [10, 12]$$

7) итак, **ответ на вопрос 3:  $S = 10$  или  $12$ .**

8) Построим дерево игры для  $S = 10$ . Обратите внимание, что после ходов Пети +1 и +3 Ваня своим следующим ходом сводит игру к одной и той же проигрышной (для Пети) позиции  $S = 14$ .



### Ещё пример задания:

**P-00.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 22. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 22 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 21$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения  $S$ , и укажите выигрывающий ход для каждого указанного значения  $S$ .

б) Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём – Петя не может выиграть за один ход, и – Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для каждого указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите значение  $S$ , при котором:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в куче.

### Решение (способ 1, таблица):

- 6) **Вопрос 1а.** Последним ходом может быть «+1» или «\*2». Выиграть последним ходом «+1» можно, если  $S = 21$ . Ходом «\*2» можно выиграть из любой позиции при  $S > 10$  (сюда входит и 21!). Можно составить таблицу, в которой « $V_1$ » обозначает выигрыш за один ход:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
											$V_1$										

Поэтому ответ должен быть такой:

«1а. Петя может выиграть за один ход при любом  $S > 10$ . Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 22 камней.»

- 7) **Вопрос 1б.** Для ответа на этот вопрос нужно найти позицию, из которой все возможные ходы ведут к выигрышу за 1 ход, то есть к позиции, отмеченной в таблице как « $V_1$ ». Например, это позиция при  $S = 10$ : ход «+1» ведёт в выигрышную позицию  $S = 11$ , а ход «\*2» ведёт в выигрышную позицию  $S = 20$ . Поэтому позицию  $S = 10$  отметим в таблице как « $x_1$ » (проигрыш за 1 ход):

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
										$x_1$	$V_1$										

Ответ на вопрос 1б должен быть такой:

«1б. При  $S = 10$  Петя не может выиграть в один ход, потому что при его ходе «+1» число камней в куче становится равно 11 (меньше 22), а при ходе «\*2» число камней в куче становится равно 20 (также меньше 22). Других возможных ходов у Пети нет. Из любой позиции после одного хода Пети (это может быть 11 или 20), Ваня может выиграть своим первым ходом, удвоив количество камней в куче.»

- 8) **Вопрос 2.** Пете, для того, чтобы гарантированно выиграть на втором ходу, нужно из начальной позиции перевести игру в проигрышную позицию, отмеченную знаком « $x_1$ ». Пока мы нашли одну такую позицию:  $S = 10$ . Петя может перевести игру в эту позицию из позиций  $S = 9$  (ходом «+1») и  $S = 5$  (ходом «\*2»)

В таблице отмечаем эти положения как « $V_2$ » – гарантированный выигрыш за 2 хода:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
					$V_2$					$V_2$	$x_1$	$V_1$									

Поэтому ответ должен быть такой:

«2. Из позиций  $S = 9$  и  $S = 5$  Петя не может выиграть в один ход, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. При  $S = 9$  ходом «+1» Пете нужно перевести игру в позицию  $S = 10$ , которая является проигрышной (см. ответ на вопрос 1б). При  $S = 5$  Петя переводит игру в ту же позицию ходом «\*2».»

- 9) **Вопрос 3.** Нужно найти такую позицию, из которой оба возможных хода Пети ведут в позиции, отмеченные в таблице как « $V_1$ » (выигрыш в 1 ход) и « $V_2$ » (выигрыш в 2 хода). Например, это позиция  $S = 8$ , из которой можно «попасть» только в  $S = 9$  (« $V_2$ ») и  $S = 16$  (« $V_1$ »). Отмечаем эту позицию как « $x_2$ » – проигрыш в два хода:

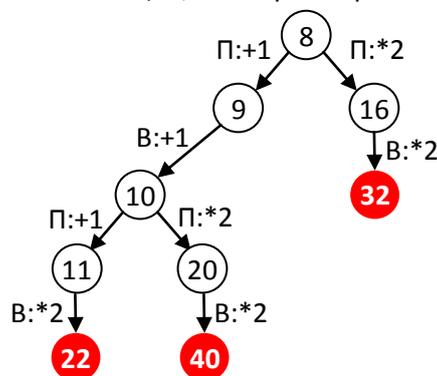
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
					$V_2$			$x_2$	$V_2$	$x_1$	$V_1$										

Поэтому ответ должен быть такой:

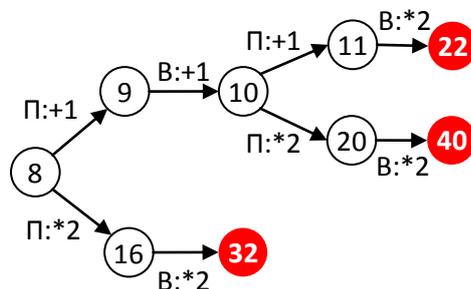
«3. В позиции  $S = 8$  у Вани есть выигрышная стратегия, которая позволяет ему выиграть первым или вторым ходом. Если Петя выбирает ход «+1», в куче становится 9 камней и Ваня выигрывает на 2-м ходу (см. ответ на вопрос 2). Если Петя выбирает ход «\*2», Ваня выигрывает первым ходом, удвоив число камней в куче.»

- 10) Остается нарисовать дерево возможных вариантов игры из позиции  $S = 8$ . Для этого используем построенную таблицу:

Здесь красным цветом выделены позиции, в которых игра заканчивается.



Обратите внимание, что на каждом шаге мы рассматриваем все возможные ходы Пети и только один лучший ход Вани. Например, в позиции  $S = 11$  Ваня может сделать ход «+1» и получить 12 камней в куче, но тогда он проиграет (Петя следующим ходом удвоит число камней и получит 24 камня). Этот ход мы не рассматриваем, потому что мы хотим доказать, что у Вани есть выигрышная стратегия – ему достаточно хода «\*2», после которого он выиграет. В то же время нужно рассмотреть все возможные ответы Пети, чтобы доказать, что у него нет шансов на выигрыш при правильной игре Вани. В этом суть теории игр – добиться лучшего результата в худшем случае, то есть при безошибочной игре соперника. Построенное дерево можно записать и в другой форме, например, «положив его на бок»:

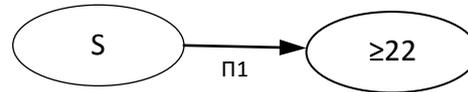


Ещё один вариант – представить дерево в виде таблицы:

Начальная позиция	1-й ход Пети (все варианты)	1-й ход Вани (ход по стратегии)	2-й ход Пети (все варианты)	2-й ход Вани (ход по стратегии)
8	9	10	11	22 (выигрыш)
			20	40 (выигрыш)
	16	32 (выигрыш)		

**Решение (способ 2, математический, О.В. Лучникова, г. Новокузнецк):**

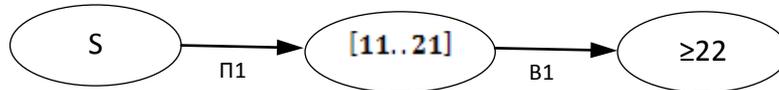
- 1) **Вопрос 1а.** Петя выигрывает первым ходом:



Петя должен правильно выбрать одно из двух возможных действий (+1 **ИЛИ** \*2), которое переведет кучу камней к состоянию  $\geq 22$ . Таким образом, получаем совокупность неравенств:

$$\begin{cases} S + 1 \geq 22 \\ S * 2 \geq 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \geq 21 \\ S \geq 11 \end{cases} \Rightarrow S \in [11..21]$$

- 2) **Вопрос 16.** Ваня выигрывает первым ходом:

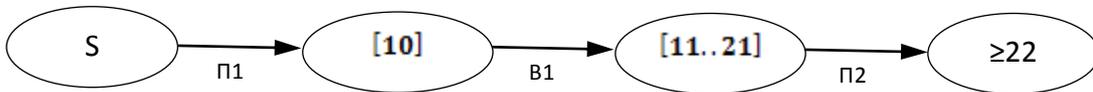


Любое действие Пети (И +1 **И** \*2) должно привести кучу камней к состоянию  $S \in [11..21]$ .

Только это может обеспечить выигрыш Вани на следующем ходу. Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} S + 1 \in [11..21] \\ S * 2 \in [11..21] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [10..20] \\ S \in [6..10] \end{cases} \Rightarrow S \in [10]$$

- 3) **Вопрос 2.** Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?



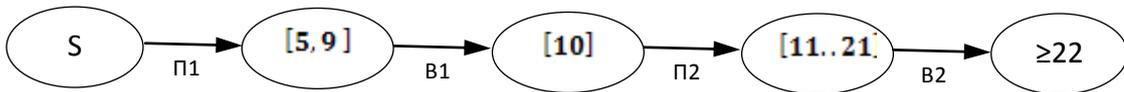
- 4) Петя должен выиграть, а это значит, он должен правильно выбрать один из двух возможных вариантов действий (+1 **ИЛИ** \*2), которое переведет кучу камней к состоянию  $S \in [10]$ .

Только это может обеспечить ему выигрыш при любом действии его противника Вани. Таким образом, получаем совокупность:

$$\begin{cases} S + 1 \in [10] \\ S * 2 \in [10] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [9] \\ S \in [5] \end{cases} \Rightarrow S \in [5, 9]$$

- 5) **Вопрос 3.** При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 6) Сначала найдем, при каком  $S$  Ваня гарантированно выигрывает именно вторым ходом.



$$\begin{cases} x + 1 \in [5, 9] \\ x * 2 \in [5, 9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [4, 8] \\ x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Таким образом, получаем, что нет такого количества камней  $S$ , которые гарантировали бы выигрыш Вани именно после его второго хода при любых действиях Пети.

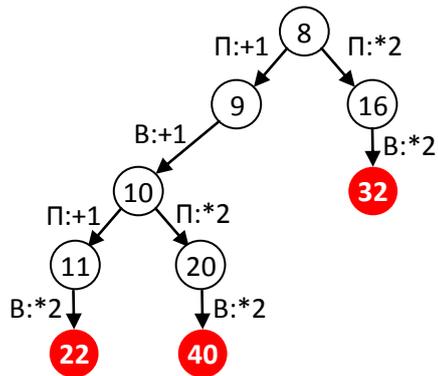
- 7) Найдем, при каких значениях  $S$  Петя не сможет победить ни после первого, ни после второго хода. Т.е. любое действие Пети приведет кучу камней к такому состоянию, при котором Ваня сможет выиграть после 1 или после второго хода:



$$\begin{cases} S + 1 \in [5, 9] \\ S * 2 \in [5, 9] \\ S + 1 \in [11..21] \\ S * 2 \in [11..21] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [4, 8] \\ S \in \emptyset \\ S \in [10..20] \\ S \in [6..10] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [4, 8] \\ S \in [6..20] \end{cases} \Rightarrow S \in [8]$$

- 8) Совокупность решений первой и второй частей – и есть все множество решений третьего вопроса. Т.е.  $S = 8$ .

9) Построим дерево игры для  $S = 8$



**Важное замечание** по поводу решения этой задачи методом О.В. Лучниковой (Г. Сергеев, ГБОУ Гимназия 1551 г. Москвы): в случае, когда возможных ходов не два, а больше, при ответе на вопрос 3 прямое применение этого метода может привести к неверному результату. Действительно, система

$$\begin{cases} [S + 1 \in [5, 9]] \\ [S * 2 \in [5, 9]] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [S \in [4, 8]] \\ [S \in \emptyset] \\ [S \in [10..20]] \\ [S \in [6..10]] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \in [4, 8] \\ S \in [6..20] \end{cases} \Rightarrow S \in [8]$$

означает, что один из возможных ходов ведёт в позицию типа  $V_2$  (выигрыш в два хода), а другой – в позицию типа  $V_1$  (выигрыш в один ход). Если есть еще и другие возможные ходы, они могут вести в проигрышные позиции, тогда, выбрав один из этих ходов, Петя может выиграть. Таким образом, к этой системе нужно добавить условие «все возможные ходы ведут в позиции типа  $V_1$  или  $V_2$ ». Еще раз отметим, что в задачах с двумя возможными ходами оно выполняется автоматически. Кроме того, нужно учесть, что из ответа на этот вопрос нужно исключить ответ на вопрос 1б, то есть позиции, из которых есть гарантированный выигрыш в 1 ход. Детали решения в случае трёх возможных ходов см. в следующей разобранной задаче (**решение Г. Сергеева**).

**Решение (способ 3, «холмы и ямы», А. Козлов, г. Северобайкальск):**

- будем обозначать на рисунке выигрышные позиции «холмом» (возвышенностью), а проигрышные – «ямой» (впадиной); таким образом, задача игрока – «посадить соперника в яму», то есть создать для него проигрышную позицию
- Вопрос 1а.** Последним ходом может быть «+1» или «\*2». Выиграть последним ходом «+1» можно, если  $S = 21$ . Ходом «\*2» можно выиграть из любой позиции при  $S > 10$  (сюда входит и 21!). Таким образом, можно выделить первый «холм», стартовав с которого игрок выигрывает в один ход (число 1 над «холмом»):

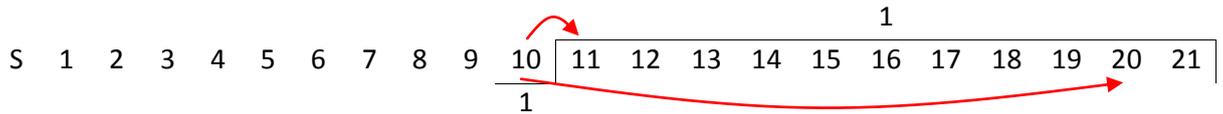
1

S 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 | 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Поэтому ответ должен быть такой:

«1а. Петя может выиграть за один ход при любом  $S > 10$ . Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 22 камней.»

- Вопрос 1б.** Для ответа на этот вопрос нужно найти позицию, из которой все возможные ходы ведут к выигрышу за 1 ход, то есть к позиции, отмеченной в таблице как « $V_1$ ». Например, это позиция при  $S = 10$ : ход «+1» ведёт в выигрышную позицию  $S = 11$ , а ход «\*2» ведёт в выигрышную позицию  $S = 20$ . Поэтому позицию  $S = 10$  отметим в таблице как «яму» и укажем внизу 1 (проигрыш за 1 ход):



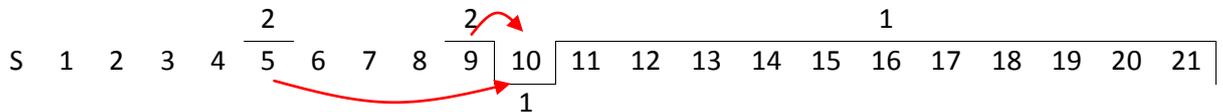
Ответ на вопрос 16 должен быть такой:

«16. При  $S = 10$  Петя не может выиграть в один ход, потому что при его ходе «+1» число камней в куче становится равно 11 (меньше 22), а при ходе «\*2» число камней в куче становится равно 20 (также меньше 22). Других возможных ходов у Пети нет. Из любой позиции после одного хода Пети (это может быть 11 или 20), Ваня может выиграть своим первым ходом, удвоив количество камней в куче.»

- 4) **Вопрос 2.** Пете, для того, чтобы гарантированно выиграть на втором ходу, нужно из начальной позиции перевести игру в проигрышную позицию, отмеченную знаком «х<sub>1</sub>». Пока мы нашли одну такую позицию:  $S = 10$ . Петя может перевести игру в эту позицию из позиций

$S = 9$  (ходом «+1») и  $S = 5$  (ходом «\*2»)

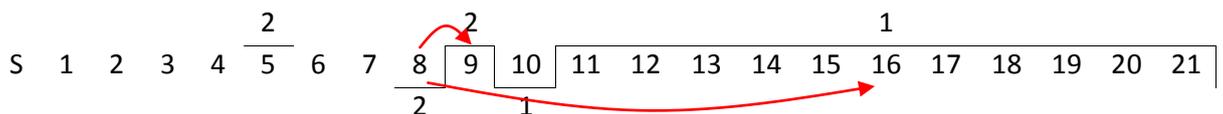
В таблице отмечаем эти положения как «холмы» с индексом 2 – гарантированный выигрыш за 2 хода:



Поэтому ответ должен быть такой:

«2. Из позиций  $S = 9$  и  $S = 5$  Петя не может выиграть в один ход, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. При  $S = 9$  ходом «+1» Пете нужно перевести игру в позицию  $S = 10$ , которая является проигрышной (см. ответ на вопрос 16). При  $S = 5$  Петя переводит игру в ту же позицию ходом «\*2».»

- 5) **Вопрос 3.** Нужно найти такую позицию, из которой оба возможных хода Пети ведут в позиции, отмеченные в таблице как «холмы» с метками 1 (выигрыш в 1 ход) или 2 (выигрыш в 2 хода). Например, это позиция  $S = 8$ , из которой можно «попасть» только в  $S = 9$  («холм-2») и  $S = 16$  («холм-1»). Отмечаем эту позицию как «яму» с меткой 2 – проигрыш в два хода:



Поэтому ответ должен быть такой:

«3. В позиции  $S = 8$  у Вани есть выигрышная стратегия, которая позволяет ему выиграть первым или вторым ходом. Если Петя выбирает ход «+1», в куче становится 9 камней и Ваня выигрывает на 2-м ходу (см. ответ на вопрос 2). Если Петя выбирает ход «\*2», Ваня выигрывает первым ходом, удвоив число камней в куче.»

**Задачи для тренировки<sup>1</sup>:**

- 1) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 2) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 33 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 32$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 3) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 19 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 34$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 4) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 55. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 55 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 54$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

<sup>1</sup> Источники заданий:

1. Демонстрационный вариант ЕГЭ 2013 гг.
2. Авторские разработки.

- 5) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 6) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 60. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 60 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 59$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 7) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 14 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 70. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 70 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 69$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 8) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 40 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 81. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 81 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 80$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

- 9) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 40 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть

неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 69. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 69 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 68$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите **три** значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите **два** значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 10) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 40 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 75. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 75 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 74$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите **четыре** значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите **три** значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 11) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите **три** значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. При каком  $S$  Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 12) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 30 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите **четыре** значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите **два** значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 13) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, ко-

гда количество камней в куче становится не менее 54. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 54 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 53$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 14) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 19 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 40 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 39$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 15) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу семь камней или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 22 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 16) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или добавить в кучу десять камней. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 25 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 41 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 40$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

- 17) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или добавить в кучу восемь камней. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 камней или 23 камня. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не

менее 35. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 34$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

18) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить число камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 камней или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 101. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 101 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 100$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

19) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или добавить в кучу 10 камней. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 8 камней или 17 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 31. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 31 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 30$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

20) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить число камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 камней или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 201. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 201 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 200$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

21) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 75. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 75 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 74$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите одно значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

22) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или пять камней или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 20 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 41 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 40$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

23) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в шесть раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 60 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 361. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 361 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 360$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

24) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 300. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 300 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 299$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

25) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11, 13 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 48. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 48 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 47$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите три значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите два значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

26) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11, 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 51. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 51 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 50$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

27) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1. добавить в кучу один камень или

2. увеличить количество камней в куче в три раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 29 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 33 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 32$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

28) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1. добавить в кучу один камень или

2. увеличить количество камней в куче в три раза и **добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 31 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 32. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 32 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 31$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

29) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в три раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 38. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 38 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 8 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 29$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите одно любое значение  $S$ , при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

30) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 47. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 47 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 4 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 42$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите одно любое значение  $S$ , при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

31) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 44. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 44 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 5 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 38$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите одно любое значение  $S$ , при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

32) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в три раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 68 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 8 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 59$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите одно любое значение  $S$ , при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

33) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 52. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 52 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 6 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 45$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите одно любое значение  $S$ , при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

34) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 80. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 80 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 72$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите одно любое значение  $S$ , при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

35) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу один камень или
- б) увеличить количество камней в куче в три раза и **убрать из кучи 2 камня**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 28 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 31. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 31 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 30$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите два значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

36) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу два камня или
- б) увеличить количество камней в куче в два раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 29 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 40 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 39$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

37) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу три камня или
- б) увеличить количество камней в куче в три раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 29 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

38) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу три камня или
- б) увеличить количество камней в куче в два раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 19 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 38. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 38 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 37$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

39) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу один камень или
- б) увеличить количество камней в куче в три раза и затем **добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 31 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 34. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 33$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

40) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу два камня или
- б) увеличить количество камней в куче в два раза и затем **добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 21 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 44. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 44 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 43$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

41) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу два камня или
- б) увеличить количество камней в куче в три раза и затем **добавить в кучу 2 камня**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 32 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 60. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 60 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 59$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

42) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в кучу три камня** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза и затем добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 21 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 85. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 85 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 84$ .

1. При каких  $S$ : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
2. Назовите все значения  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
3. Назовите все значения  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

43) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 38 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (7, 15), (9, 14) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (7, 14), (8, 14), (9, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (8, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

44) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или
- б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 45 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (5, 13), (8, 12) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (5, 12), (7,12), (8, 11) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (6,12) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

45) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза.**

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 58 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (9, 23), (10, 23) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (10, 22), (12,21) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (9,22) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

46) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза.**

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 70 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (9, 29), (11, 28) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (10, 28), (12,27) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (10,27) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

47) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза.**

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 75 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (10, 32), (11, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (10, 31), (11,30), (12,30) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (10,29) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

48) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза.**

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 55 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (8, 23), (9, 22) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (8, 21), (8,22), (9,21) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (9,19) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

49) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или
- б) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 67 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (9, 19), (11, 18) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (9, 18), (10,18), (11,16) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (10,17) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

50) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или
- б) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 48 камней или больше.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (5, 14), (7, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (5, 13), (6,13), (7,11) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

**Задание 3.** Для начальной позиции (6,12) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

51) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 28. Если при этом в куче оказалось не более 46 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 27$ .

**Задание 1.** а) При каких значениях числа  $S$  Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при  $S = 24, 25, 26$ ? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

**Задание 2.** У кого из игроков есть выигрышная стратегия при  $S = 10, 11$ ? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

**Задание 3.** У кого из игроков есть выигрышная стратегия при  $S = 8$ ? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.