

18 (повышенный уровень, время – 3 мин)

Тема: Основные понятия математической логики.

Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике ($\wedge, \vee, \neg$), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает $\wedge$ и $\vee$. Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение). В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек ($\wedge, \vee, \neg$), что еще раз подчеркивает проблему. Далее во всех решениях приводятся два варианта записи.

Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$\neg A, \bar{A}$	не A (отрицание, инверсия)
$A \wedge B, A \cdot B$	A и B (логическое умножение, конъюнкция)
$A \vee B, A + B$	A или B (логическое сложение, дизъюнкция)
$A \rightarrow B$	импликация (следование)
- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация» (см. презентацию «Логика»)
- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B \text{ или в других обозначениях } A \rightarrow B = \bar{A} + B$$
- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация»
- иногда полезны формулы де Моргана¹:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &= \neg A \vee \neg B & \overline{A \cdot B} &= \bar{A} + \bar{B} \\ \neg(A \vee B) &= \neg A \wedge \neg B & \overline{A + B} &= \bar{A} \cdot \bar{B} \end{aligned}$$

Пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [37; 60]$ и $Q = [40; 77]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in P) \rightarrow (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение:

- для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- перейдем к более простым обозначениям

$$P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P})$$

- раскрываем обе импликации по формуле $A \rightarrow B = \bar{A} + B$:

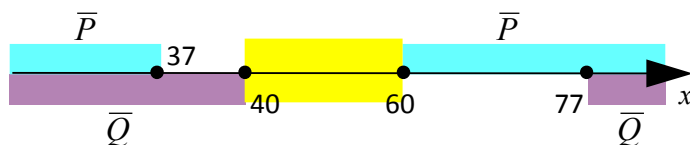
$$P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} + \bar{P}) = \bar{P} + Q \cdot \bar{A} + \bar{P} = \bar{Q} \cdot \bar{A} + \bar{P}$$

- теперь используем закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$:

$$\bar{Q} + A + \bar{P}$$

¹ Огастес (Август) де Морган – шотландский математик и логик.

- 5) в таком виде выражение уже смотрится совсем не страшно; Сразу видно, что отрезок A должен перекрывать область на числовой оси, которая не входит в область $\overline{Q} + \overline{P}$:



- 6) по рисунку видно, что не перекрывает только отрезок $[40;60]$ (он выделен жёлтым цветом), его длина – 20, это и есть правильный ответ.
7) Ответ: **20**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 39]$ и $Q = [23, 58]$. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) $[5, 20]$ 2) $[15, 35]$ 3) $[25, 45]$ 4) $[5, 65]$

Решение:

- 1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 2) перейдем к более простым обозначениям

$$P \cdot A \rightarrow Q \cdot A$$

- 3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ($A \rightarrow B = \overline{A} + B$):

$$P \cdot A \rightarrow Q \cdot A = \overline{P \cdot A} + Q \cdot A$$

- 4) раскроем инверсию первого слагаемого по закону де Моргана ($\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$):

$$\overline{P \cdot A} + Q \cdot A = \overline{P} + \overline{A} + Q \cdot A$$

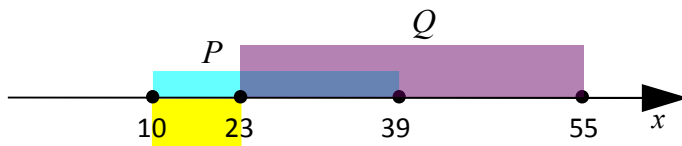
- 5) теперь применим закон поглощения

$$A + \overline{A} \cdot B = (A + \overline{A}) \cdot (A + B) = A + B$$

к последним двум слагаемым:

$$\overline{P} + \overline{A} + Q \cdot A = \overline{P} + \overline{A} + Q$$

- 6) для того, чтобы выражение было истинно при всех x , нужно, чтобы $\overline{A}$ было истинно там, где ложно $\overline{P} + Q$, то есть там, где истинно $\overline{\overline{P} + Q} = P \cdot \overline{Q}$ (жёлтая область на рисунке)



- 7) таким образом, A должно быть ложно на отрезке $[10,23]$, такой отрезок в предложенном наборе один – это отрезок $[25, 45]$
8) Ответ: **3**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 30]$ и $Q = [25, 55]$. Определите наибольшую возможную длину отрезка A , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) 10 2) 20 3) 30 4) 45

Решение:

- 9) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

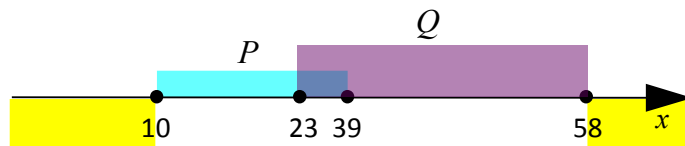
- 10) перейдем к более простым обозначениям

$$A \rightarrow (P + Q)$$

- 11) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ($A \rightarrow B = \bar{A} + B$):

$$A \rightarrow (P + Q) = \bar{A} + P + Q$$

- 12) для того, чтобы выражение было истинно при всех x , нужно, чтобы $\bar{A}$ было истинно там, где ложно $P + Q$ (жёлтая область на рисунке)



- 13) поэтому максимальный отрезок, где A может быть истинно (и, соответственно, $\bar{A}$ ложно) – это отрезок $[10, 55]$, имеющий длину 45

- 14) Ответ: 4.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 20]$ и $Q = [25, 55]$. Определите наибольшую возможную длину отрезка A , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) 10 2) 20 3) 30 4) 45

Решение:

- 1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

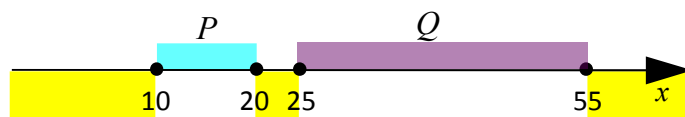
- 2) перейдем к более простым обозначениям

$$A \rightarrow (P + Q)$$

- 3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ($A \rightarrow B = \bar{A} + B$):

$$A \rightarrow (P + Q) = \bar{A} + P + Q$$

- 4) для того, чтобы выражение было истинно при всех x , нужно, чтобы $\bar{A}$ было истинно там, где ложно $P + Q$ (жёлтая область на рисунке)



- 5) поскольку области истинности P и Q разделены, максимальный отрезок, где A может быть истинно (и, соответственно, $\bar{A}$ ложно) – это наибольший из отрезков P и Q , то есть отрезок $[25, 55]$, имеющий длину 30

- 6) Ответ: 3.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [14, 34]$ и $Q = [24, 44]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .
Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [15, 29] 2) [25, 29] 3) [35, 39] 4) [49, 55]

Решение:

- 7) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

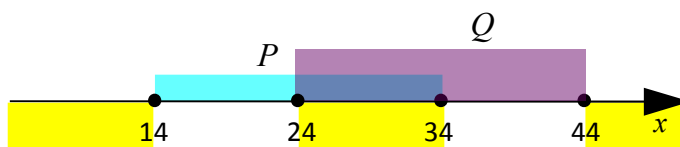
$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 8) перейдем к более простым обозначениям

$$A \rightarrow (P \equiv Q)$$

- 9) выражение $R = (P \equiv Q)$ истинно для всех значений x , при которых P и Q равны (либо оба ложны, либо оба истинны)

- 10) нарисует область истинности выражения $R = (P \equiv Q)$ на числовой оси (жёлтые области)



- 11) импликация $A \rightarrow R$ истинна за исключением случая, когда $A=1$ и $R=0$, поэтому на полуотрезках $[14, 24[$ и $]34, 44]$, где $R=0$, выражение A должно быть обязательно ложно; никаких других ограничений не накладывается
- 12) из предложенных ответов этому условию соответствуют отрезки $[25, 29]$ и $[49, 55]$; по условию из них нужно выбрать самый длинный
- 13) отрезок $[25, 29]$ имеет длину 4, а отрезок $[49, 55]$ – длину 6, поэтому выбираем отрезок $[49, 55]$
- 14) Ответ: **4**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [20, 50]$ и $Q = [10, 60]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .
Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [5, 40] 2) [15, 54] 3) [30, 58] 4) [5, 70]

Решение:

- 15) в этом выражении две импликации связаны с помощью операции И (конъюнкции), поэтому для истинности всего выражения обе импликации должны быть истинными

- 16) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 17) перейдем к более простым обозначениям в обоих условиях

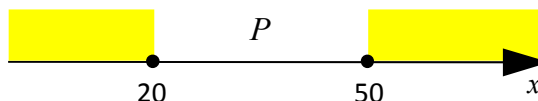
$$(P \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow Q)$$

и выразим импликацию через операции ИЛИ и НЕ:

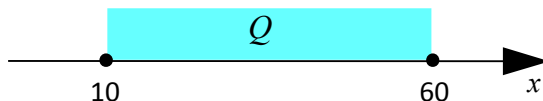
$$Z_1 = P \rightarrow A = \bar{P} + A,$$

$$Z_2 = A \rightarrow Q = \bar{A} + Q$$

- 18) выражение $\bar{P} + A$ должно быть истинно на всей числовой оси; обозначим область, которую перекрывает выражение $\bar{P}$ – это две полуоси



- 19) отсюда следует, что отрезок А должен полностью перекрывать отрезок Р; этому условию удовлетворяют варианты ответов **2 и 4**
- 20) выражение $\bar{A} + Q$ тоже должно быть истинно на всей числовой оси; выражение $\bar{A}$ должно перекрывать все, кроме отрезка, который перекрывает выражение Q :



- 21) поэтому начало отрезка А должно быть внутри отрезка [10,20], а его конец – внутри отрезка [50,60]
- 22) этим условиям удовлетворяет только вариант 2.
- 23) Ответ: **2**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [35, 55]$ и $Q = [45, 65]$. Выберите такой отрезок А, что обе приведённые ниже формулы истинны при любом значении переменной x :

$$(x \in P) \rightarrow (x \in A)$$

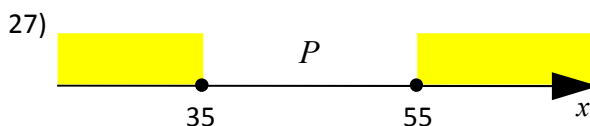
$$(\neg(x \in A)) \rightarrow (\neg(x \in Q))$$

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) [40,50] 2) [30,60] 3) [30,70] 4) [40, 100]

Решение:

- 24) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами
- A:** $x \in A$, **P:** $x \in P$, **Q:** $x \in Q$
- 25) перейдем к более простым обозначениям в первом условии $P \rightarrow A$ и выразим импликацию через операции ИЛИ и НЕ: $Z_1 = P \rightarrow A = \bar{P} + A$
- 26) выражение $\bar{P} + A$ должно быть истинно на всей числовой оси; обозначим область, которую перекрывает выражение $\bar{P}$ - это две полуоси



- 27)
- 28) отсюда следует, что отрезок А должен полностью перекрывать отрезок Р; этому условию удовлетворяют варианты ответов **2 и 3**
- 29) аналогично разбираем и преобразуем второе выражение
- $$Z_2 = \bar{A} \rightarrow \bar{Q} = A + \bar{Q}$$
- 30) и находим, что для того, чтобы обеспечить истинность второго выражения на всей оси отрезок А должен полностью перекрыть отрезок Q; этому условию удовлетворяют варианты ответов **3 и 4**
- 31) объединяя результаты п. 5 и 7, получаем, что условию задачи соответствует только отрезок 3.
- 32) Ответ: **3**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 10]$ и $Q = [6, 14]$. Выберите такой отрезок А, что формула

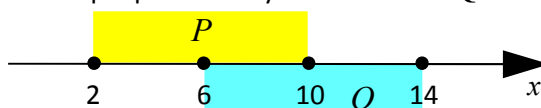
$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [0, 3] 2) [3, 11] 3) [11, 15] 4) [15, 17]

Решение:

- 1) два условия связаны с помощью операции $\vee$ («ИЛИ»), поэтому должно выполняться хотя бы одно из них
- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами
 $A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$
- 3) тогда получаем, переходя к более простым обозначениям:
 $Z = (A \rightarrow P) + Q$
- 4) представим импликацию $A \rightarrow P$ через операции «ИЛИ» и «НЕ»: $A \rightarrow P = \bar{A} + P$, так что получаем $Z = \bar{A} + P + Q$
- 5) это значит, что для тождественной истинности выражения Z нужно, чтобы для любого x было выполнено одно из условий: $\bar{A}$, P , Q ; из всех этих выражений нам **неизвестно только $\bar{A}$**
- 6) посмотрим, какие интервалы перекрываются условиями P и Q :



- 7) видим, что отрезок $[2,14]$ перекрыт, поэтому выражение $\bar{A}$ должно перекрывать оставшуюся часть; таким образом, $\bar{A}$ должно быть истинно на интервалах $(-\infty, 2)$ и $(14, \infty)$ и, соответственно, выражение A (без инверсии) может быть истинно только внутри отрезка $[2,14]$
- 8) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезков $[3,11]$ (вариант 2) находится целиком внутри отрезка $[2,14]$, это и есть правильный ответ
- 9) Ответ: **2**.

Решение (вариант 2, А.Н. Евтеев):

- 1) пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
- 2) полученное после преобразований выражение $Z = \bar{A} + P + Q$ должно быть истинно при любом x
- 3) логическая сумма истинна во всех случаях кроме одного: если все слагаемые ложны, следовательно выражение $Z = \bar{A} + P + Q$ ложно только когда $A = 1$, $P = 0$ и $Q = 0$
- 4) поэтому если область истинности A выйдет за пределы отрезка $[2,14]$, где одновременно ложны P и Q , то $Z = \bar{A} + P + Q$ будет ложно
- 5) это значит, что A может быть истинно только внутри отрезка $[2,14]$
- 6) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезков $[3,11]$ (вариант 2) находится целиком внутри отрезка $[2,14]$, это и есть правильный ответ
- 7) Ответ: **2**.

Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

- 1) пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
- 2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
- 3) эти точки (2, 6, 10 и 14) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Y = P + Q$

x	P	Q	$Y = P + Q$
$x < 2$	0	0	0
$2 < x < 6$	1	0	1
$6 < x < 10$	1	1	1
$10 < x < 14$	0	1	1
$x > 14$	0	0	0

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение $Z = \bar{A} + P + Q$ должно быть равно 1 при любых значениях x , то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение $\bar{A}$ (и соответствующее значение A) для каждого интервала:

x	P	Q	$Y = P + Q$	$\bar{A}$	A	$Z = \bar{A} + P + Q$
$x < 2$	0	0	0	1	0	1
$2 < x < 6$	1	0	1	любое	любое	1
$6 < x < 10$	1	1	1	любое	любое	1
$10 < x < 14$	0	1	1	любое	любое	1
$x > 14$	0	0	0	1	0	1

- 5) таким образом, значение A должно быть равно 0 вне отрезка $[2, 14]$; из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезков $[3, 11]$ (вариант 2)
 6) Ответ: **2**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 20]$ и $Q = [15, 25]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) $[0, 15]$ 2) $[10, 25]$ 3) $[2, 10]$ 4) $[15, 20]$

Решение (отрезки на оси):

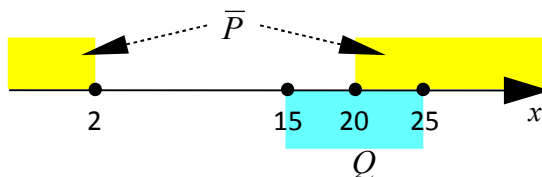
- 1) два условия связаны с помощью операции $\vee$ («ИЛИ»), поэтому должно выполняться хотя бы одно из них
 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q$$

- 3) учтем, что в формуле используется знак $\notin$ («не принадлежит»), поэтому при переходе к более простым обозначениям получаем:

$$Z = (\bar{A} \rightarrow \bar{P}) + Q$$

- 4) представим импликацию $\bar{A} \rightarrow \bar{P}$ через операции «ИЛИ» и «НЕ»: $\bar{A} \rightarrow \bar{P} = A + \bar{P}$, так что получаем $Z = A + \bar{P} + Q$
 5) это значит, что для тождественной истинности выражения Z нужно, чтобы для любого x было выполнено одно из условий: A , $\bar{P}$, Q ; из всех этих выражений нам **неизвестно только A**
 6) посмотрим, какие интервалы перекрываются условиями $\bar{P}$ и Q ; область $\bar{P}$ состоит из двух участков числовой оси, которые не входят в отрезок $[2, 20]$, а область Q – это отрезок $[15, 25]$:



- 7) таким образом, область истинности выражения A должна перекрывать оставшуюся часть – отрезок $[2, 15]$

- 8) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок $[0,15]$ (вариант 1) полностью перекрывает отрезок $[2,15]$, это и есть правильный ответ
- 9) Ответ: **1**.

Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

- 1) пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
- 2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
- 3) эти точки (2,15,20 и 25) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Y = \bar{P} + Q$

x	P	$\bar{P}$	Q	$Y = \bar{P} + Q$
$x < 2$	0	1	0	1
$2 < x < 15$	1	0	0	0
$15 < x < 20$	1	0	1	1
$20 < x < 25$	0	1	1	1
$x > 25$	0	1	0	1

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение $Z = A + \bar{P} + Q$ должно быть равно 1 при любых значениях x , то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение A для каждого интервала:

x	P	$\bar{P}$	Q	$Y = \bar{P} + Q$	A	$Z = A + \bar{P} + Q$
$x < 2$	0	1	0	1	любое	1
$2 < x < 15$	1	0	0	0	1	1
$15 < x < 20$	1	0	1	1	любое	1
$20 < x < 25$	0	1	1	1	любое	1
$x > 25$	0	1	0	1	любое	1

- 5) таким образом, область истинности выражения A должна перекрывать отрезок $[2,15]$
- 6) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок $[0,15]$ (вариант 1) полностью перекрывает отрезок $[2,15]$, это и есть правильный ответ
- 7) Ответ: **1**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны три отрезка: $P = [10, 25]$, $Q = [15, 30]$ и $R = [25, 40]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in Q) \rightarrow (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P)$$

тождественно **ложна**, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

- 1) $[0, 15]$ 2) $[10, 40]$ 3) $[25, 35]$ 4) $[15, 25]$

Решение (способ 1):

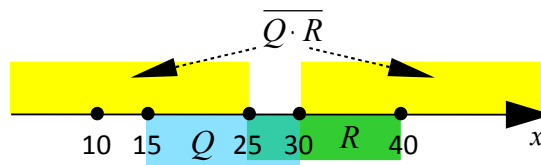
- 1) три условия связаны с помощью операции $\wedge$ (логическое «И»), поэтому для того, чтобы выражение было тождественно равно нулю, для каждого значения x по крайней мере одно из них должно быть ложно
- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q, \quad R: x \in R$$

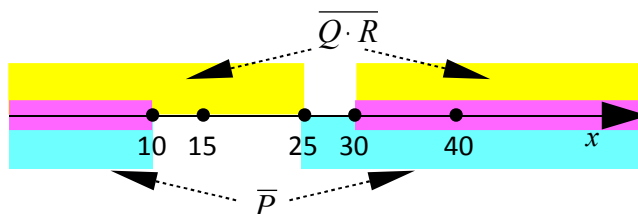
- 3) учтем, что в формуле дважды используется знак $\notin$ («не принадлежит»), поэтому при переходе к более простым обозначениям получаем:

$$Z = (Q \rightarrow \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$$

- 4) представим импликацию $Q \rightarrow \bar{R}$ через операции «ИЛИ» и «НЕ»: $Q \rightarrow \bar{R} = \bar{Q} + \bar{R}$, так что получаем $Z = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$
- 5) роль сомножителя A состоит в том, чтобы обнулить выражение везде, где произведение $(\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$ равно 1; поэтому для этих значений x выражение A должно быть равно нулю, а для остальных x его значение не играет роли
- 6) область истинности выражения $\bar{Q} + \bar{R}$ по закону де Моргана совпадает с областью истинности выражения $\overline{Q \cdot R}$, то есть это область вне общей части отрезков Q и R (она показана жёлтым цветом на рисунке):



- 7) теперь умножим это выражение на $\bar{P}$ (ему соответствует область вне отрезка $[10, 25]$), построив область $(\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$; эта область, где одновременно истинны $\bar{Q} + \bar{R}$ и $\bar{P}$, выделена фиолетовым цветом:



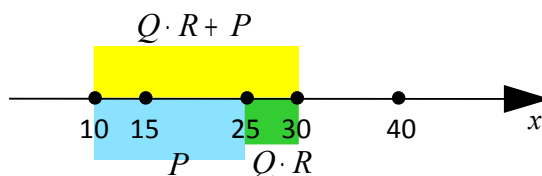
- 8) как следует из п. 4, в фиолетовой области на предыдущем рисунке выражение A должно быть обязательно равно 0, и только внутри отрезка $[10, 30]$ может быть истинно
- 9) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка $[10, 30]$
- 10) этому условию удовлетворяет только отрезок $[15, 25]$ (ответ 4)
- 11) Ответ: **4**.

Решение (способ 2, инверсия и преобразование):

- 1) пп. 1-4 такие же, как и в первом способе
- 2) выражение Z тождественно ложно тогда и только тогда, когда обратное ему, $\bar{Z}$, тождественно истинно; таким образом, если выполнить инверсию для Z , мы сведём задачу к задаче из демо-варианта ЕГЭ-2013, разобранной выше
- 3) имеем, используя законы де Моргана:

$$\bar{Z} = \overline{(\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}} = \overline{(\bar{Q} + \bar{R})} + \overline{A \cdot \bar{P}} = Q \cdot R + \bar{A} + P$$

- 4) выражение $Q \cdot R$ истинно на общей части (пересечении) отрезков Q и R , то есть, на отрезке $[25, 30]$
- 5) добавляя к этому диапазону отрезок P , получим отрезок $[10, 30]$, где истинно выражение $Q \cdot R + P$



- 6) остальную часть числовой оси (при x меньше 10 и x больше 30) должно перекрыть выражение $\bar{A}$, то есть A должно быть ложно вне отрезка $[10, 30]$

- 7) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка $[10,30]$
- 8) этому условию удовлетворяет только отрезок $[15,25]$ (ответ 4)
- 9) Ответ: 4.

Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

- 1) пп. 1-5 такие же, как и в первом способе решения
- 2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
- 3) эти точки (10,15,25, 30 и 40) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Y = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$

x	P	$\bar{P}$	Q	$\bar{Q}$	R	$\bar{R}$	$\bar{Q} + \bar{R}$	$Y = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$
$x < 10$	0	1	0	1	0	1	1	1
$10 < x < 15$	1	0	0	1	0	1	1	0
$15 < x < 25$	1	0	1	0	0	1	1	0
$25 < x < 30$	0	1	1	0	1	0	0	0
$30 < x < 40$	0	1	0	1	1	0	1	1
$x > 40$	0	1	0	1	0	1	1	1

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение $Z = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$ должно быть равно 0 при любых значениях x , то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение A для каждого интервала:

x	$Y = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot \bar{P}$	A	$Z = (\bar{Q} + \bar{R}) \cdot A \cdot \bar{P}$
$x < 10$	1	0	0
$10 < x < 15$	0	любое	0
$15 < x < 25$	0	любое	0
$25 < x < 30$	0	любое	0
$30 < x < 40$	1	0	0
$x > 40$	1	0	0

- 1) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка $[10,30]$
- 2) этому условию удовлетворяет только отрезок $[15,25]$ (ответ 4)
- 3) Ответ: 4.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны три интервала: $P = (5, 10)$, $Q = [10, 20]$ и $R = [25, 40]$. Выберите такой отрезок A , что выражения

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \text{ и } (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно **равны**, то есть принимают одинаковые значения при любом значении переменной x .

- 1) $[7, 20]$ 2) $[2, 12]$ 3) $[10, 25]$ 4) $[20, 30]$

Решение (способ 1, отрезки на числовой прямой):

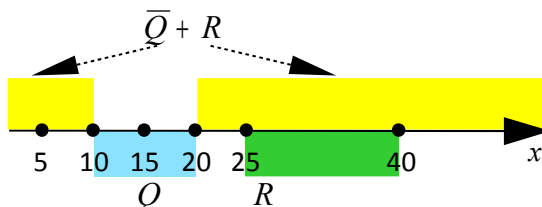
- 1) обратите внимание, что интервал P – это открытый интервал; это необходимо для того, чтобы можно было выполнить заданное условие в точках стыковки отрезков
- 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами
- $A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q, \quad R: x \in R$
- 3) перейдём к более простым обозначениям:

$$Y = A \rightarrow P, Z = Q \rightarrow R$$

- 4) выразим импликации через операции «ИЛИ» и «НЕ»:

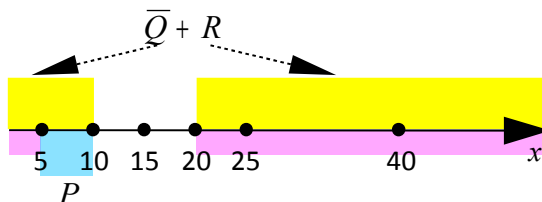
$$Y = A \rightarrow P = \bar{A} + P, Z = Q \rightarrow R = \bar{Q} + R$$

- 5) заметим, что неизвестная величина A входит только в выражение Y
- 6) общая идея состоит в том, чтобы построить на числовой оси область истинности для полностью известного выражения $Z = \bar{Q} + R$, а затем дополнить отрезок P до этой области; это «дополнение» будет соответствовать области $\bar{A}$
- 7) построим область $Z = \bar{Q} + R$ – объединение отрезка R и области вне отрезка Q :



обратим внимание, что область $Z = \bar{Q} + R$ (выделена жёлтым цветом) в данном случае совпадает с $\bar{Q}$

- 8) теперь рассмотрим область P (выделена голубым цветом)



- 9) чтобы область истинности выражения $Y = \bar{A} + P$ совпала с жёлтой областью, выражение $\bar{A}$ должно «перекрыть» всю фиолетовую область (возможно, заходя в область P)
- 10) поэтому выражение A обязательно должно быть истинно на отрезке $[10, 20]$; обязательно должно быть ложно на полуосях $(-\infty, 5)$ и $(20, +\infty)$, а на отрезке $[5, 10]$ его значение может быть любым (там выполнение требований обеспечивает область P)
- 11) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок $[7, 20]$ (ответ 1)
- 12) Ответ: 1.

Решение (способ 2, таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

- 1) пп. 1-6 такие же, как и в первом способе решения
- 2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
- 3) эти точки (5, 10, 20, 25 и 40) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Z = \bar{Q} + R$

x	P	Q	$\bar{Q}$	R	$Z = \bar{Q} + R$
$x < 5$	0	0	1	0	1
$5 < x < 10$	1	0	1	0	1
$10 < x < 20$	0	1	0	0	0
$20 < x < 25$	0	0	1	0	1
$25 < x < 40$	0	0	1	1	1
$x > 40$	0	0	1	0	1

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 4) по условию выражение $Z = \overline{Q} + R$ должно быть равно выражению $Y = \overline{A} + P$ при любых значениях x , отсюда можно найти, каким должно быть значение $\overline{A}$ (и соответствующее значение A) для каждого интервала:

x	$Z = \overline{Q} + R$	$Y = \overline{A} + P$	P	$\overline{A}$	A
$x < 5$	1	1	0	1	0
$5 < x < 10$	1	1	1	любое	любое
$10 < x < 20$	0	0	0	0	1
$20 < x < 25$	1	1	0	1	0
$25 < x < 40$	1	1	0	1	0
$x > 40$	1	1	0	1	0

- 4) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который перекрывает отрезок $[10, 20]$ и, возможно, заходит внутрь отрезка $[5, 10]$
 5) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок $[7, 20]$ (ответ 1)
 6) Ответ: **1**.

Ещё пример задания:

На числовой прямой даны три интервала: $P = (10, 15)$, $Q = [5, 20]$ и $R = [15, 25]$. Выберите такой отрезок A , что выражения

$$(x \notin A) \rightarrow (x \in P) \text{ и } (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

принимают **различные** значения при любых x .

- 1) $[7, 20]$ 2) $[2, 15]$ 3) $[5, 12]$ 4) $[20, 25]$

Решение (способ 1, отрезки на числовой прямой):

- 1) обратите внимание, что интервал P – это открытый интервал; это необходимо для того, чтобы можно было выполнить заданное условие в точках стыковки отрезков
 2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$A: x \in A, \quad P: x \in P, \quad Q: x \in Q, \quad R: x \in R$$

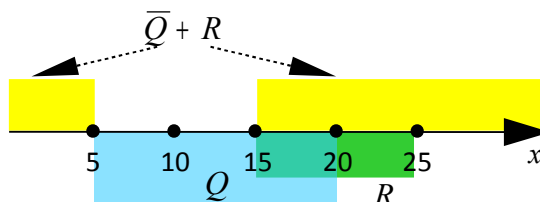
- 3) перейдём к более простым обозначениям:

$$Y = \overline{A} \rightarrow P, \quad Z = Q \rightarrow R$$

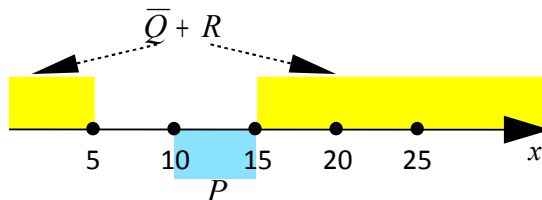
- 4) выразим импликации через операции «ИЛИ» и «НЕ»:

$$Y = \overline{A} \rightarrow P = A + P, \quad Z = Q \rightarrow R = \overline{Q} + R$$

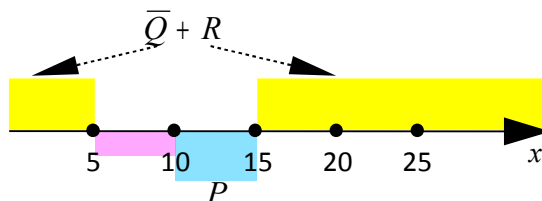
- 5) заметим, что неизвестная величина A входит только в выражение Y
 6) общая идея состоит в том, чтобы построить на числовой оси область истинности для полностью известного выражения $Z = \overline{Q} + R$, а затем дополнить отрезок P до «обратной» области, в которой выражение Z ложно; это «дополнение» будет соответствовать области A
 7) построим область $Z = \overline{Q} + R$ – объединение отрезка R и области вне отрезка Q :



- 8) теперь рассмотрим область P (выделена голубым цветом)



- 9) чтобы выполнить заданное условие (противоположность значений $Y = A + P$ и $Z = \bar{Q} + R$ при любых x), область истинности выражения $Y = A + P$ должна совпадать с областью, где выражение Z ложно; для этого выражение A должно «перекрывать» всю фиолетовую область (возможно, заходя в область P), но не должно заходить в «жёлтую» область:



- 10) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок $[5, 12]$ (ответ 3)

- 11) Ответ: 3.

Решение (способ 2, таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

- 5) пп. 1-6 такие же, как и в первом способе решения
 6) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
 7) эти точки (5, 10, 15, 20 и 25) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Z = \bar{Q} + R$

x	P	Q	$\bar{Q}$	R	$Z = \bar{Q} + R$
$x < 5$	0	0	1	0	
$5 < x < 10$	0	1	0	0	
$10 < x < 15$	1	1	0	0	
$15 < x < 20$	0	1	0	1	
$20 < x < 25$	0	0	1	1	
$x > 25$	0	0	1	0	

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

- 8) по условию выражение $Z = \bar{Q} + R$ должно быть НЕ равно выражению $Y = A + P$ при любых значениях x , откуда можно найти, каким должно быть значение A для каждого интервала:

x	$Z = \bar{Q} + R$	$Y = A + P$	P	A
$x < 5$	1	0	0	0
$5 < x < 10$	0	1	0	1
$10 < x < 15$	0	1	1	любое
$15 < x < 20$	1	0	0	0
$20 < x < 25$	1	0	0	0
$x > 25$	1	0	0	0

- 7) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который перекрывает отрезок $[5, 10]$ и, возможно, заходит внутрь отрезка $[10, 15]$
 8) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок $[5, 12]$ (ответ 3)
 9) Ответ: 3.

Ещё пример задания:

Какое из приведённых имен удовлетворяет логическому условию:

(первая буква согласная $\rightarrow$ вторая буква согласная) $\wedge$ (предпоследняя буква гласная $\rightarrow$ последняя буква гласная)?

- 1) КРИСТИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

Решение:

- 1) два условия связаны с помощью операции $\wedge$ («И»), поэтому должны выполняться одновременно
- 2) импликация ложна, если ее первая часть («посылка») истинна, а вторая («следствие») – ложна
- 3) первое условие «первая буква согласная $\rightarrow$ вторая буква согласная» ложно тогда, когда первая буква согласная, а вторая – гласная, то есть для ответов 2 и 4
- 4) второе условие «предпоследняя буква гласная $\rightarrow$ последняя буква гласная» ложно тогда, когда предпоследняя буква гласная, а последняя – согласная, то есть, для ответа 3
- 5) таким образом, для варианта 1 (КРИСТИНА) оба промежуточных условия и исходное условие в целом истинны
- 6) ответ: **1**.

Ещё пример задания:

Для какого из указанных значений X истинно высказывание $\neg ((X > 2) \rightarrow (X > 3))$?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение (вариант 1, прямая подстановка):

- 1) определим порядок действий: сначала вычисляются результаты отношений в скобках, затем выполняется импликация (поскольку есть «большие» скобки), затем – отрицание (операция «НЕ») для выражения в больших скобках
- 2) выполняем операции для всех приведенных возможных ответов (1 обозначает истинное условие, 0 – ложное); сначала определяем результаты сравнения в двух внутренних скобках:

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg ((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0		
2	0	0		
3	1	0		
4	1	1		

- 3) по таблице истинности операции «импликация» находим третий столбец (значение выражения в больших скобках), применив операцию «импликация» к значениям второго и третьего столбцов (в каждой строке):

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg ((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0	1	
2	0	0	1	
3	1	0	0	
4	1	1	1	

- 4) значение выражения равно инверсии третьего столбца (меняем 1 на 0 и наоборот):

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg ((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1

4	1	1	1	0
---	---	---	---	---

5) таким образом, ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:

- можно «забыть» отрицание (помните, что правильный ответ – всего один!)
- можно перепутать порядок операций (скобки, «НЕ», «И», «ИЛИ», «импликация»)
- нужно помнить таблицу истинности операции «импликация», которую очень любят составители тестов²
- этот метод проверяет только заданные числа и не дает общего решения, то есть не определяет все множество значений X , при которых выражение истинно

Решение (вариант 2, упрощение выражения):

1) обозначим простые высказывания буквами:

$$A = X > 2, \quad B = X > 3$$

2) тогда можно записать все выражение в виде

$$\neg(A \rightarrow B) \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B}$$

3) выразим импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» (см. выше):

$$\neg(A \rightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B} = \overline{\neg A + B}$$

4) раскрывая по формуле де Моргана операцию «НЕ» для всего выражения, получаем

$$\neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B \quad \text{или} \quad \overline{\neg A + B} = A \cdot \overline{B}$$

5) таким образом, данное выражение истинно только тогда, когда A истинно ($X > 2$), а B – ложно ($X \leq 3$), то есть для всех X , таких что $2 < X \leq 3$

6) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,

7) таким образом, ответ – 3.

Возможные проблемы:

- нужно помнить законы логики (например, формулы де Моргана)
- при использовании формул де Моргана нужно не забыть заменить «И» на «ИЛИ» и наоборот
- нужно не забыть, что инверсией (отрицанием) для выражения $X > 3$ является $X \leq 3$, а не $X < 3$

Решение (вариант 3, использование свойств импликации):

1) обозначим простые высказывания буквами:

$$A = X > 2, \quad B = X > 3$$

2) тогда исходное выражение можно переписать в виде $\neg(A \rightarrow B) = 1$ или $A \rightarrow B = 0$

3) импликация $A \rightarrow B$ ложна в одном единственном случае, когда $A = 1$ и $B = 0$; поэтому заданное выражение истинно для всех X , таких что $X > 2$ и $X \leq 3$

4) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,

5) таким образом, ответ – 3.

Выводы:

- 1) в данном случае, наверное, проще третий вариант решения, однако он основан на том, что импликация ложна только для одной комбинации исходных данных; не всегда этот прием применим
- 2) второй и третий варианты позволяют не только проверить заданные значения, но и получить *общее* решение – все множество X , для которых выражение истинно; это более красиво для человека, обладающего математическим складом ума.

² ... но которая, к сожалению, почти не нужна на практике. ☺

Задачи для тренировки³:

- 1) Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание
 $((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X < 1))$
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 2) Для какого числа X истинно высказывание $((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 3) Для какого числа X истинно высказывание $X > 1 \wedge ((X < 5) \rightarrow (X < 3))$
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 4) Для какого имени истинно высказывание:
 $\neg (\text{Первая буква имени гласная} \rightarrow \text{Четвертая буква имени согласная})?$
 1) ЕЛЕНА 2) ВАДИМ 3) АНТОН 4) ФЕДОР
- 5) Для какого символьного выражения неверно высказывание:
 $\text{Первая буква гласная} \rightarrow \neg (\text{Третья буква согласная})?$
 1) abedc 2) becde 3) babas 4) abcab
- 6) Для какого числа X истинно высказывание $(X > 2) \vee (X > 5) \rightarrow (X < 3)$
 1) 5 2) 2 3) 3 4) 4
- 7) Для какого из значений числа Z высказывание $((Z > 2) \vee (Z > 4)) \rightarrow (Z > 3)$ будет ложным?
 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
- 8) Для какого имени истинно высказывание:
 $\neg (\text{Первая буква имени согласная} \rightarrow \text{Третья буква имени гласная})?$
 1) ЮЛИЯ 2) ПЕТР 3) АЛЕКСЕЙ 4) КСЕНИЯ

³ Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2015 гг.
2. Тренировочные и диагностические работы МИОО.
3. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
4. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.
5. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2010. Информатика. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.
6. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
7. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. — М.: НИИ школьных технологий, 2010.
8. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
9. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ 2011. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-центр, 2011.
10. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.

9) Для какого из значений числа Y высказывание $(Y < 5) \wedge ((Y > 1) \rightarrow (Y > 5))$ будет истинным?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

10) Для какого символьного выражения верно высказывание:

$\neg$ (Первая буква согласная) $\wedge \neg$ (Вторая буква гласная)?

- 1) abcde 2) bcade 3) babas 4) cabab

11) Для какого имени истинно высказывание:

(Вторая буква гласная $\rightarrow$ Первая буква гласная) $\wedge$ Последняя буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН

12) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$ (Первая буква согласная $\rightarrow$ Последняя буква гласная) $\wedge$ Вторая буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) СТЕПАН 3) МАРИНА 4) ИВАН

13) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная $\rightarrow$ Вторая буква согласная) $\wedge$ Последняя буква гласная?

- 1) КСЕНИЯ 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН

14) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$ (Вторая буква гласная $\rightarrow$ Первая буква гласная) $\wedge$ Последняя буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) МАРИЯ 4) СТЕПАН

15) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$ (Первая буква согласная $\rightarrow$ Последняя буква согласная) $\wedge$ Вторая буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) СТЕПАН 3) МАРИЯ 4) КСЕНИЯ

16) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$ (Первая буква гласная $\rightarrow$ Вторая буква гласная) $\wedge$ Последняя буква гласная?

- 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) АРТЕМ 4) МАРИЯ

17) Для какого названия животного ложно высказывание:

Заканчивается на согласную $\wedge$ В слове 7 букв $\rightarrow \neg$ (Третья буква согласная)?

- 1) Верблюд 2) Страус 3) Кенгуру 4) Леопард

18) Для какого названия животного ложно высказывание:

В слове 4 гласных буквы $\wedge \neg$ (Пятая буква гласная) $\vee$ В слове 5 согласных букв?

- 1) Шиншилла 2) Кенгуру 3) Антилопа 4) Крокодил

19) Для какого названия животного ложно высказывание:

Четвертая буква гласная $\rightarrow \neg$ (Вторая буква согласная)?

- 1) Собака 2) Жираф 3) Верблюд 4) Страус

20) Для какого слова ложно высказывание:

Первая буква слова согласная $\rightarrow$ (Вторая буква имени гласная $\wedge$ Последняя буква слова согласная)?

- 1) ЖАРА 2) ОРДА 3) ОГОРОД 4) ПАРАД

21) Для какого числа X истинно высказывание $(X \cdot (X-16) > -64) \rightarrow (X > 8)$

- 1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

22) Для какого числа X истинно высказывание $(X \cdot (X-8) > -25 + 2 \cdot X) \rightarrow (X > 7)$

- 1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

23) Для какого символического набора истинно высказывание:

Вторая буква согласная $\wedge$ (В слове 3 гласных буквы $\vee$ Первая буква согласная)?

- 1) УББОШТ 2) ТУИОШШ 3) ШУБВОИ 4) ИТПРАО

24) Для какого имени ложно высказывание:

(Первая буква гласная $\wedge$ Последняя буква согласная) $\rightarrow \neg$ (Третья буква согласная)?

- 1) ДМИТРИЙ 2) АНТОН 3) ЕКАТЕРИНА 4) АНАТОЛИЙ

25) Для какого имени истинно высказывание:

Первая буква гласная $\wedge$ Четвертая буква согласная $\vee$ В слове четыре буквы?

- 1) Сергей 2) Вадим 3) Антон 4) Илья

26) Для какого числа X истинно высказывание

$((X < 4) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 3) \rightarrow (X < 1))$

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

27) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$ (Первая буква согласная $\rightarrow$ Вторая буква согласная) $\wedge$ Последняя буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

28) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$ (Первая буква согласная $\rightarrow$ Последняя буква согласная) $\wedge$ Вторая буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) СТЕПАН 3) КСЕНИЯ 4) МАРИЯ

29) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная $\rightarrow$ Вторая буква согласная) $\wedge$ Последняя буква гласная?

- 1) КСЕНИЯ 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

30) Для какого имени истинно высказывание:

$\neg$ (Последняя буква гласная $\rightarrow$ Первая буква согласная) $\wedge$ Вторая буква согласная?

- 1) ИРИНА 2) АРТЁМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

31) Для какого слова истинно высказывание:

$\neg$ (Первая буква согласная $\rightarrow$ (Вторая буква согласная $\vee$ Последняя буква гласная)))?

1) ГОРЕ 2) ПРИВЕТ 3) КРЕСЛО 4) ЗАКОН

32) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная $\rightarrow$ Вторая буква гласная) $\wedge$ Последняя буква согласная?

1) АЛИСА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) ЕЛЕНА

33) Для какого имени истинно высказывание:

(Вторая буква гласная $\rightarrow$ Первая буква гласная) $\wedge$ Последняя буква согласная?

1) АЛИСА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) ЕЛЕНА

34) Для какого названия реки ложно высказывание:

(Вторая буква гласная $\rightarrow$ Предпоследняя буква согласная) $\wedge$ Первая буква стоит в алфавите раньше третьей?

1) ДУНАЙ 2) МОСКВА 3) ДВИНА 4) ВОЛГА

35) Для каких значений X и Y истинно высказывание:

$(Y+1 > X) \vee (Y+X < 0) \wedge (X > 1)$?

1) $X = 0,5; Y = -1,1$ 2) $X = 1,1; Y = -4$
3) $X = -1; Y = -4$ 4) $X = -1/10; Y = -1,1$

36) Для какого слова истинно высказывание:

(Вторая буква согласная $\vee$ Последняя буква гласная) $\rightarrow$ Первая буква гласная?

1) ГОРЕ 2) ПРИВЕТ 3) КРЕСЛО 4) ЗАКОН

37) Для какого имени истинно высказывание:

Первая буква согласная $\wedge (\neg$ Вторая буква согласная $\rightarrow$ Четвертая буква гласная)?

1) ИВАН 2) ПЕТР 3) ПАВЕЛ 4) ЕЛЕНА

38) Для какого названия станции метро истинно высказывание:

(Первая буква согласная $\rightarrow$ Вторая буква согласная) $\sim$ Название содержит букву «л»?

Знаком $\sim$ обозначается операция эквивалентности (результат $X \sim Y$ – истина, если значения X и Y совпадают).

1) Маяковская 2) Отрадное 3) Волжская 4) Комсомольская

39) Для какого названия города истинно высказывание:

(Первая буква гласная $\wedge$ Последняя буква гласная) $\sim$ Название содержит букву «м»?

Знаком $\sim$ обозначается операция эквивалентности (результат $X \sim Y$ – истина, если значения X и Y совпадают).

1) Москва 2) Дюссельдорф 3) Амстердам 4) Атланта

40) Для какого имени истинно высказывание:

(Первая буква согласная $\vee$ Вторая буква гласная) $\rightarrow$ В слове 4 буквы?

1) МИХАИЛ 2) ГРИГОРИЙ 3) ЕВГЕНИЙ 4) ИОЛАНТА

41) Для какого числа X истинно высказывание $((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X > 1))$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

- 42) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [5, 15]$ и $Q = [12, 18]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) $[3, 11]$ 2) $[2, 21]$ 3) $[10, 17]$ 4) $[15, 20]$

- 43) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [5, 10]$ и $Q = [15, 18]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) $[3, 11]$ 2) $[6, 10]$ 3) $[8, 16]$ 4) $[17, 23]$

- 44) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [25, 30]$ и $Q = [15, 20]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) $[10, 15]$ 2) $[12, 30]$ 3) $[20, 25]$ 4) $[26, 28]$

- 45) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 20]$ и $Q = [15, 30]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) $[0, 15]$ 2) $[3, 20]$ 3) $[10, 25]$ 4) $[25, 40]$

- 46) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 25]$ и $Q = [0, 12]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) $[10, 15]$ 2) $[20, 35]$ 3) $[5, 20]$ 4) $[12, 40]$

- 47) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 20]$ и $Q = [12, 15]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \notin A) \rightarrow (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) $[10, 15]$ 2) $[20, 35]$ 3) $[5, 20]$ 4) $[12, 40]$

- 48) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 20]$ и $Q = [5, 15]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) $[10, 15]$ 2) $[20, 35]$ 3) $[15, 22]$ 4) $[12, 18]$

- 49) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 20]$ и $Q = [15, 25]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [8, 17] 2) [10, 12] 3) [15, 22] 4) [12, 18]

- 50) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [10, 40]$, $Q = [5, 15]$ и $R = [35, 50]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [10, 20] 2) [15, 25] 3) [20, 30] 4) [120, 130]

- 51) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [0, 20]$, $Q = [5, 15]$ и $R = [35, 50]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [-15, -5] 2) [2, 7] 3) [10, 17] 4) [15, 20]

- 52) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [15, 30]$, $Q = [0, 10]$ и $R = [25, 35]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [10, 17] 2) [15, 25] 3) [20, 30] 4) [35, 40]

- 53) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [20, 50]$, $Q = [15, 20]$ и $R = [40, 80]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \in A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [10, 25] 2) [20, 30] 3) [40, 50] 4) [35, 45]

- 54) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [10, 50]$, $Q = [15, 20]$ и $R = [30, 80]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \notin A) \rightarrow (x \notin R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [10, 25] 2) [25, 50] 3) [40, 60] 4) [50, 80]

- 55) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [0, 40]$, $Q = [20, 45]$ и $R = [10, 50]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \vee ((x \notin A) \rightarrow (x \notin R))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [5, 20] 2) [10, 15] 3) [15, 20] 4) [35, 50]

- 56) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [5, 15]$ и $Q = [10, 20]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in P) \wedge (x \notin Q) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

1) [0, 7] 2) [8, 15] 3) [15, 20] 4) [7, 20]

- 57) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [12, 22]$ и $Q = [7, 17]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \notin P) \wedge (x \in Q) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

1) [0, 5] 2) [7, 12] 3) [10, 20] 4) [5, 22]

- 58) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 20]$ и $Q = [5, 15]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in Q) \rightarrow (x \in P)) \wedge (x \in A)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

1) [0, 6] 2) [5, 8] 3) [7, 15] 4) [12, 20]

- 59) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [15, 30]$, $Q = [5, 10]$ и $R = [20, 25]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge ((x \notin A) \rightarrow (x \in R))$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

1) [0, 20] 2) [0, 10] 3) [10, 15] 4) [25, 30]

- 60) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [15, 30]$, $Q = [5, 10]$ и $R = [10, 20]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in Q)) \wedge (x \notin A) \wedge (x \in R)$$

тождественно ложна, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной x .

1) [0, 12] 2) [10, 17] 3) [15, 20] 4) [15, 30]

- 61) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [10, 15]$, $Q = [10, 20]$ и $R = [5, 15]$. Выберите такой интервал A , что формулы

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной x (за исключением, возможно, конечного числа точек).

1) [5, 12] 2) [10, 17] 3) [12, 20] 4) [15, 25]

- 62) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [5, 10]$, $Q = [15, 20]$ и $R = [25, 30]$. Выберите такой интервал A , что формулы

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \notin R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной x (за исключением, возможно, конечного числа точек).

1) [5, 10] 2) [15, 20] 3) [10, 20] 4) [15, 25]

- 63) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [10, 25]$, $Q = [15, 30]$ и $R = [25, 35]$. Выберите такой интервал A , что формулы

$$(x \notin A) \rightarrow (x \notin P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной x (за исключением, возможно, конечного числа точек).

1) (10, 12) 2) (0, 10) 3) (5, 15) 4) (15, 25)

- 64) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [10, 30]$, $Q = [15, 30]$ и $R = [20, 35]$. Выберите такой интервал A , что формулы

$$(x \notin A) \rightarrow (x \notin P) \quad \text{и} \quad (x \in Q) \rightarrow (x \notin R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной x (за исключением, возможно, конечного числа точек).

1) (10, 25) 2) (15, 20) 3) (15, 30) 4) (5, 20)

- 65) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [5, 15]$, $Q = [10, 20]$ и $R = [15, 20]$. Выберите такой интервал A , что формулы

$$(x \in A) \rightarrow (x \in P) \quad \text{и} \quad (x \notin Q) \rightarrow (x \notin R)$$

тождественно равны, то есть принимают равные значения при любом значении переменной x (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) $[3, 10]$ 2) $[7, 12]$ 3) $[12, 17]$ 4) $[22, 25]$

- 66) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [5, 25]$, $Q = [5, 15]$ и $R = [10, 20]$. Выберите такой интервал A , что формулы

$$(x \notin A) \rightarrow (x \notin P) \quad \text{и} \quad (x \notin Q) \rightarrow (x \in R)$$

тождественно различны, то есть принимают разные значения при любом значении переменной x (за исключением, возможно, конечного числа точек).

- 1) $(5, 12)$ 2) $(10, 18)$ 3) $(18, 25)$ 4) $(20, 35)$

- 67) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [3, 9]$ и $Q = [4, 12]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) $[0, 5]$ 2) $[5, 10]$ 3) $[10, 15]$ 4) $[15, 20]$

- 68) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [4, 16]$ и $Q = [9, 18]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) $[1, 11]$ 2) $[3, 10]$ 3) $[5, 15]$ 4) $[15, 25]$

- 69) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [3, 13]$ и $Q = [7, 17]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee \neg(x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) $[5, 20]$ 2) $[10, 25]$ 3) $[15, 30]$ 4) $[20, 35]$

- 70) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [5, 15]$ и $Q = [11, 21]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee \neg(x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) $[2, 22]$ 2) $[3, 13]$ 3) $[6, 16]$ 4) $[17, 27]$

- 71) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [30, 45]$ и $Q = [40, 55]$. Выберите такой отрезок A , что обе приведённые ниже формулы истинны при любом значении переменной x :

$$(\neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in P)$$

$$(x \in Q) \rightarrow (x \in A)$$

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[25, 50]$ 2) $[25, 65]$ 3) $[35, 50]$ 4) $[35, 85]$

- 72) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [41, 61]$ и $Q = [11, 91]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[7, 43]$ 2) $[7, 73]$ 3) $[37, 53]$ 4) $[37, 63]$

- 73) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [32, 52]$ и $Q = [12, 72]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[7, 53]$ 2) $[7, 33]$ 3) $[27, 53]$ 4) $[27, 33]$

- 74) (<http://ege.yandex.ru>) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 30]$ и $Q = [20, 40]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[10, 19]$ 2) $[21, 29]$ 3) $[31, 39]$ 4) $[9, 41]$

- 75) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [54, 84]$ и $Q = [64, 94]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[25, 40]$ 2) $[45, 61]$ 3) $[65, 82]$ 4) $[75, 83]$

- 76) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [34, 64]$ и $Q = [74, 94]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[5, 33]$ 2) $[25, 42]$ 3) $[45, 71]$ 4) $[65, 90]$

- 77) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [34, 84]$ и $Q = [44, 94]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

- 1) $[45, 60]$ 2) $[65, 81]$ 3) $[85, 102]$ 4) $[105, 123]$

- 78) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [6, 16]$ и $Q = [30, 50]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

- 1) 10 2) 20 3) 21 4) 30

- 79) (<http://ege-go.ru>) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10, 40]$ и $Q = [30, 50]$. Отрезок A таков, что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Какова наибольшая возможная длина отрезка A ?

- 1) 10 2) 20 3) 30 4) 40

- 80) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 42]$ и $Q = [22, 62]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \notin A) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \notin Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [3, 14] 2) [23, 32] 3) [43, 54] 4) [15, 45]

- 81) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 42]$ и $Q = [22, 62]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$((x \in P) \rightarrow (x \notin Q)) \rightarrow (x \notin A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [3, 14] 2) [23, 32] 3) [43, 54] 4) [15, 45]

- 82) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [3, 33]$ и $Q = [22, 44]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in Q) \rightarrow ((x \in P) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [2, 20] 2) [10, 25] 3) [20, 40] 4) [25, 30]

- 83) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [3, 33]$ и $Q = [22, 44]$. Выберите такой отрезок A , что формула

$$(x \in P) \rightarrow ((x \in Q) \rightarrow (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [31, 45] 2) [21, 35] 3) [11, 25] 4) [1, 15]

- 84) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [23, 58]$ и $Q = [10, 39]$. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [5, 20] 2) [20, 40] 3) [40, 55] 4) [5, 55]

- 85) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [20, 70]$ и $Q = [5, 32]$. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [15, 35] 2) [20, 40] 3) [40, 65] 4) [75, 88]

- 86) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [23, 58]$ и $Q = [1, 39]$. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) [5, 30] 2) [15, 40] 3) [25, 50] 4) [35, 60]

- 87) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [8, 39]$ и $Q = [23, 58]$. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A , что логическое выражение

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \rightarrow ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

1) [5, 30]

2) [15, 40]

3) [20, 50]

4) [35, 60]