

## 23 (высокий уровень, время – 10 мин)

**Тема:** Преобразование логических выражений.

### Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике ( $\wedge \vee \neg$ ), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает И и  $\vee$ . Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение). В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек ( $\wedge \vee \neg$ ), что еще раз подчеркивает проблему.

### Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$$\neg A, \bar{A} \quad \text{не } A \text{ (отрицание, инверсия)}$$

$$A \wedge B, A \cdot B \quad A \text{ и } B \text{ (логическое умножение, конъюнкция)}$$

$$A \vee B, A + B \quad A \text{ или } B \text{ (логическое сложение, дизъюнкция)}$$

$$A \rightarrow B \quad \text{импликация (следование)}$$

$$A \leftrightarrow B, A \equiv B \quad \text{эквиваленция (эквивалентность, равносильность)}$$

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация», «эквиваленция» (см. презентацию «Логика»)
- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B \text{ или в других обозначениях } A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

- операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \leftrightarrow B = \neg A \wedge \neg B \vee A \wedge B \text{ или в других обозначениях } A \leftrightarrow B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$$

- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», потом – «импликация», и самая последняя – «эквиваленция»
- логическое произведение  $A \cdot B \cdot C \dots$  равно 1 (выражение истинно) только тогда, когда все сомножители равны 1 (а в остальных случаях равно 0)
- логическая сумма  $A + B + C \dots$  равна 0 (выражение ложно) только тогда, когда все слагаемые равны 0 (а в остальных случаях равна 1)
- правила преобразования логических выражений (законы алгебры логики):

Закон	Для И	Для ИЛИ
двойного отрицания	$\bar{\bar{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A; A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A; A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
де Моргана	$\bar{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$	$\bar{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

### Пример задания:

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_1 \vee y_1) = 1$$

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\neg \mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & \dots \\
 & (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_6 \wedge \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_8) \wedge (\neg \mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_6) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_7 \vee \mathbf{x}_8) \wedge (\neg \mathbf{x}_7 \vee \mathbf{y}_7) = 1 \\
 & \neg \mathbf{x}_8 \vee \mathbf{y}_8 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_8, y_1, \dots, y_8$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение (вариант 1, использование свойств битовых цепочек, М.А. Ройтберг):**

- 1) перепишем систему с более понятными обозначениями:

$$\begin{aligned}
 & (x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \cdot (\overline{x_1} + y_1) = 1 \\
 & (x_2 + x_3) \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot (\overline{x_2} + y_2) = 1 \\
 & \dots \\
 & (x_6 + x_7) \cdot (x_6 \cdot x_7 \rightarrow x_8) \cdot (\overline{x_6} + y_6) = 1 \\
 & (x_7 + x_8) \cdot (\overline{x_7} + y_7) = 1 \\
 & \overline{x_8} + y_8 = 1
 \end{aligned}$$

- 2) первые 6 уравнений однотипны, отличаются только сдвигом номеров переменных  
 3) будем рассматривать каждое решение как пару битовых цепочек (цепочек нулей и единиц)  
 $X = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$  и  $Y = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8$   
 4) первые сомножители в первых уравнениях,  $x_i + x_{i+1}$ , означают, что в цепочке  $X$  не может быть двух нулей подряд (иначе эта скобка в первых 6 уравнениях и всё произведение равны нулю)  
 5) вторые скобки,  $x_i \cdot x_{i+1} \rightarrow x_{i+2}$ , означают, что если в цепочке  $X$  встретились две единицы подряд, то потом будут только единицы, поскольку в противном случае  $1 \rightarrow 0 = 0$  и все произведение равно 0  
 6) пока «забудем» про третьи сомножители ( $\overline{x_i} + y_i$ ); тогда цепочка  $X$  в любом решении выглядит так: сначала чередуются нули и единицы, а с некоторого места идут только единицы  
 7) такая цепочка полностью определяется позицией последнего нуля, т.е. есть всего 9 таких цепочек (позиция последнего нуля от 0 до 8, 0 значит, что нулей нет)

$$\begin{aligned}
 X_0 &= 11111111 \\
 X_1 &= 01111111 \\
 X_2 &= 10111111 \\
 X_3 &= 01011111 \\
 X_4 &= 10101111 \\
 X_5 &= 01010111 \\
 X_6 &= 10101011 \\
 X_7 &= 01010101 \\
 X_8 &= 10101010
 \end{aligned}$$

- 8) третий сомножитель в каждом выражении – это импликация  $x_i \rightarrow y_i = \overline{x_i} + y_i$   
 9) это означает, что если  $(X, Y)$  – решение и  $x_i = 1$ , то  $y_i = 1$ ; если же  $x_i = 0$ , то для  $y_i$  есть два возможных значения – 0 и 1  
 10) поэтому для каждого из указанных выше девяти векторов  $X$  с количество возможных цепочек  $Y$  равно  $2^{z(X)}$ , где  $z(X)$  – количество нулей в соответствующем векторе  $X$

- 11) поэтому для  $X_0$  (нет нулей) получаем  $2^0 = 1$  решение, для  $X_1$  и  $X_2$  (один нуль) –  $2^1 = 2$  решения; для  $X_3$  и  $X_4$  (два нуля) –  $2^2 = 4$  решения; для  $X_5$  и  $X_6$  (три нуля) –  $2^3 = 8$  решений; для  $X_7$  и  $X_8$  (четыре нуля) –  $2^4 = 16$  решений
- 12) общее количество решений системы  $1 + 2^*(2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 1 + 2^*30 = 61$ .
- 13) ответ: 61.

**Решение (вариант 2, последовательное подключение уравнений, метод отображений):**

- 14) перепишем систему с более понятными обозначениями:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \cdot (\overline{x_1} + y_1) &= 1 \\ (x_2 + x_3) \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot (\overline{x_2} + y_2) &= 1 \\ \dots \\ (x_6 + x_7) \cdot (x_6 \cdot x_7 \rightarrow x_8) \cdot (\overline{x_6} + y_6) &= 1 \\ (x_7 + x_8) \cdot (\overline{x_7} + y_7) &= 1 \\ \overline{x_8} + y_8 &= 1 \end{aligned}$$

- 15) первые 6 уравнений однотипны, отличаются только сдвигом номеров переменных

- 16) первое и второе уравнения связаны только через пару  $(x_2, x_3)$ , второе и третье – только через пару  $(x_3, x_4)$  и т.д.;

- 17) таким образом, для того, чтобы определить количество решений системы из первых двух уравнений, нам нужно построить *отображение* всех пар  $(x_2, x_3)$  на пары  $(x_3, x_4)$ ; это значит, для каждого варианта пары  $(x_2, x_3)$  определить количество различных решений, соответствующих всем возможным парам  $(x_3, x_4)$

- 18) покажем это на примере; рассмотрим второе уравнение:

$$(x_2 + x_3) \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot (\overline{x_2} + y_2) = 1$$

- 19) пусть  $(x_2, x_3) = (0,0)$ , тогда первая скобка равна 0 и решений нет, никаких стрелок в таблице отображения пока нет:

$$\begin{array}{c} (0,0)(0,0)(0,1)(0,1)(1,0)(1,0)(1,1) \\ (1,1) \end{array}$$

- 20) если  $(x_2, x_3) = (0,1)$ , получаем уравнение

$$(0 \rightarrow x_4) \cdot (1 + y_2) = 1 \Leftrightarrow 0 \rightarrow x_4 = 1$$

Которое имеет четыре решения:  $x_4$  и  $y_2$  могут быть любыми; при этом пара  $(x_2, x_3) = (0,1)$  отображается на две пары  $(x_3, x_4) = (1,0)$  и на две пары  $(x_3, x_4) = (1,1)$ :

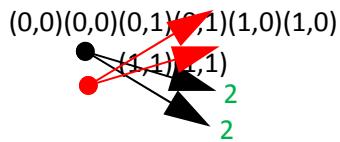
$$\begin{array}{c} (0,0)(0,0)(0,1)(0,1)(1,0)(1,0)(1,0) \\ \bullet \quad (1,1)/(1,1) \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array}$$

- 21) если  $(x_2, x_3) = (1,0)$ , получаем уравнение

$$(0 \rightarrow x_4) \cdot y_2 = 1$$

Здесь и  $x_4$  может принимать любые значения (0 или 1), а  $y_2 = 1$ , всего получается 2 решения.

Поскольку  $x_3 = 0$ , одно решение соответствуют паре  $(x_3, x_4) = (0,0)$ , а другое – паре  $(x_3, x_4) = (0,1)$ :

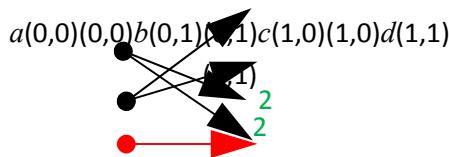


22) наконец, если  $(x_2, x_3) = (1,1)$ , получаем уравнение

$$(1 \rightarrow x_4) \cdot y_2 = 1$$

Здесь обязательно  $x_4 = 1$  и  $y_2 = 1$ , всего одно решение, и оно соответствует паре

$(x_3, x_4) = (1,1)$ :



23) теперь обозначим через  $a, b, c$  и  $d$  число решений, соответствующих связующим парам  $(0,0), (0,1), (1,0)$  и  $(1,1)$ , соответственно

24) как видно из схемы, при подключении нового уравнения эти значения преобразуются по рекуррентным формулам:

$$\tilde{a} = c, \tilde{b} = c, \tilde{c} = 2b, \tilde{d} = 2b + d$$

25) используя эти формулы, заполняем таблицу, начиная со всех значений, равных 1:

Число уравнений	0	1	2	3	4	5	6
$a$	1	1	2	2	4	4	8
$b$	1	1	2	2	4	4	8
$c$	1	2	2	4	4	8	8
$d$	1	3	5	9	13	21	29

26) итак, мы получили, что система из первых шести уравнений имеет всего  $8+8+8+29=53$  решения; теперь подключаем пятое равнение, которое связано с первыми четырьмя через пару  $(x_7, x_8)$ :

$$(x_7 + x_8) \cdot (\overline{x_7} + y_7) = 1$$

27) заметим, что последнее, 8-е уравнение, связано с предыдущими только через  $x_8$ , поэтому, подключая 5-е уравнение, строим отображение пары  $(x_7, x_8)$  на  $x_8$ :

при  $(x_7, x_8) = (0,0)$  решений нет

при  $(x_7, x_8) = (0,1)$  два решения ( $y_7 = 0,1$ ), оба при  $x_8 = 1$

при  $(x_7, x_8) = (1,0)$  одно решение ( $y_7 = 1$ ), отображается на  $x_8 = 0$

при  $(x_7, x_8) = (1,1)$  одно решение ( $y_7 = 1$ ), отображается на  $x_8 = 1$

28) из таблицы (см. выше) следует, что система из 4-х уравнений имеет 8 решений при  $(x_7, x_8) = (0,0)$ , которые не дают решений системы из 7 уравнений;

- 8 решений при  $(x_7, x_8) = (0,1)$ , которые дают по 2 решения (всего 16 при  $x_8 = 1$ );  
 8 решений при  $(x_7, x_8) = (1,0)$ , которые дают по одному решению (всего 8 при  $x_8 = 0$ );  
 29 решений при  $(x_7, x_8) = (1,1)$ , которые дают по одному решению (всего 29 при  $x_8 = 1$ );  
 29) всего получаем 8 решений при  $x_8 = 0$  и 45 решений при  $x_8 = 1$ ;  
 30) теперь подключаем 8-е уравнение  
 $\overline{x_8} + y_8 = 1$   
 31) при  $x_8 = 0$  последнее уравнение имеет два решения ( $y_8 = 0,1$ ), поэтому вся система  
 уравнений имеет  $2 \cdot 8 = 16$  решений с  $x_8 = 0$   
 32) при  $x_8 = 1$  это уравнение имеет одно решение ( $y_8 = 1$ ), поэтому вся система уравнений  
 имеет 45 решений с  $x_8 = 1$   
 33) Ответ:  $16 + 45 = 61$ .

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1) &= 1 \\ (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2) &= 1 \\ (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{y}_3) &= 1 \\ (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{y}_4) &= 1 \\ (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{y}_5) &= 1 \\ \mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_6 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

### Решение (вариант 1, битовые цепочки, М.А. Ройтберг):

- 1) перепишем систему с более понятными обозначениями:  

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_1 + y_1) &= 1 \\ (x_2 + x_3) \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_2 + y_2) &= 1 \\ (x_3 + x_4) \cdot (x_3 \cdot x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_3 + y_3) &= 1 \\ (x_4 + x_5) \cdot (x_4 \cdot x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_4 + y_4) &= 1 \\ (x_5 + x_6) \cdot (x_5 + y_5) &= 1 \\ x_6 + y_6 &= 1 \end{aligned}$$
- 2) решением уравнения будут два набора логических переменных,  $X$  и  $Y$ , которые можно представить в виде битовых цепочек:  

$$X = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, Y = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$
- 3) первые 4 уравнения однотипны, отличаются только сдвигом номеров переменных;  
 рассмотрим сначала их
- 4) сомножитель  $x_i + x_{i+1}$  должен быть равен 1, поэтому в цепочке  $X$  не должно быть двух идущих подряд нулей (иначе  $x_i + x_{i+1} = 0$  и все произведение равно 0)
- 5) сомножитель  $x_i \cdot x_{i+1} \rightarrow x_{i+2}$  должен быть равен 1, поэтому если в цепочке  $X$  появились две единицы подряд, то дальше идут только единицы (иначе  $x_i \cdot x_{i+1} \rightarrow x_{i+2} = 1 \rightarrow 0 = 0$  и все произведение равно 0)

- 6) таким образом, если не учитывать (пока) сомножитель  $x_i + y_i$  в каждом из уравнений, существует всего 7 допустимых цепочек  $X$ , каждая из которых определяется положением последнего нуля (0 – вообще нет нуля):

$$\begin{array}{ll} X_0 = 111111 & X_4 = 101011 \\ X_1 = 011111 & X_5 = 010101 \\ X_2 = 101111 & X_6 = 101010 \\ X_3 = 010111 \end{array}$$

- 7) теперь рассмотрим сомножители  $x_i + y_i$ , которые тоже должны быть равны 1; если  $x_i = 0$ , то сразу получаем  $y_i = 1$ ; если же  $x_i = 1$ , то есть два варианта  $y_i = 0, 1$
- 8) таким образом, для каждой цепочки  $X$  количество соответствующих цепочек  $Y$  равно  $2^{I(X)}$ , где через  $I(X)$  обозначено число единиц в цепочке  $X$
- 9) в цепочке  $X_0$  есть 6 единиц, в цепочках  $X_1$  и  $X_2$  – по пять, в цепочках  $X_3$  и  $X_4$  – по четыре, в  $X_5$  и  $X_6$  – по три
- 10) поэтому общее число решений вычисляется как  $2^6 + 2 \cdot (2^5 + 2^4 + 2^3) = 64 + 2 \cdot (32 + 16 + 8) = 176$
- 11) Ответ: 176.

**Решение (вариант 2, последовательное подключение уравнений, метод отображений):**

- 1) перепишем систему с более понятными обозначениями:
- $$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \cdot (x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_1 + y_1) &= 1 \\ (x_2 + x_3) \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_2 + y_2) &= 1 \\ (x_3 + x_4) \cdot (x_3 \cdot x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_3 + y_3) &= 1 \\ (x_4 + x_5) \cdot (x_4 \cdot x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_4 + y_4) &= 1 \\ (x_5 + x_6) \cdot (x_5 + y_5) &= 1 \\ x_6 + y_6 &= 1 \end{aligned}$$
- 2) первые 4 уравнения однотипны, отличаются только сдвигом номеров переменных
- 3) первое и второе уравнения связаны только через пару  $(x_2, x_3)$ , второе и третье – только через пару  $(x_3, x_4)$  и т.д.;
- 4) таким образом, для того, чтобы определить количество решений системы из первых двух уравнений, нам нужно построить *отображение* всех пар  $(x_2, x_3)$  на пары  $(x_3, x_4)$ ; это значит, для каждого варианта пары  $(x_2, x_3)$  определить количество различных решений, соответствующих всем возможным парам  $(x_3, x_4)$
- 5) покажем это на примере; рассмотрим второе уравнение:
- $$(x_2 + x_3) \cdot (x_2 \cdot x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_2 + y_2) = 1$$
- 6) пусть  $(x_2, x_3) = (0,0)$ , тогда первая скобка равна 0 и решений нет, никаких стрелок в таблице отображения пока нет:

$$\begin{matrix} (0,0)(0,0)(0,1)(0,1)(1,0)(1,0)(1,1) \\ (1,1) \end{matrix}$$

- 7) если  $(x_2, x_3) = (0,1)$ , получаем уравнение
- $$(0 \rightarrow x_4) \cdot y_2 = 1$$

Которое имеет два решения:  $x_4 = 0$  или 1, а  $y_2 = 1$ ; при этом пара  $(x_2, x_3) = (0,1)$

отображается на одну пару  $(x_3, x_4) = (1,0)$  и на одну пару  $(x_3, x_4) = (1,1)$ :

$(0,0)(0,0)(0,1)(0,1)(1,0)(1,0)(1,1)$



8) если  $(x_2, x_3) = (1,0)$ , получаем уравнение

$$(0 \rightarrow x_4) \cdot (1 + y_2) = 1$$

Здесь и  $x_4$ , и  $y_2$  могут принимать любые значения (0 или 1), всего получается 4 решения.

Поскольку  $x_3 = 0$ , два решения соответствуют паре  $(x_3, x_4) = (0,0)$ , а другие два – паре  $(x_3, x_4) = (0,1)$ :

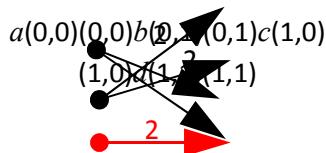
$(0,0)(0,0)(0,1)(0,1)(1,0)(1,0)(1,1)$



9) наконец, если  $(x_2, x_3) = (1,1)$ , получаем уравнение

$$(1 \rightarrow x_4) \cdot (1 + y_2) = 1$$

Здесь обязательно  $x_4 = 1$ , а  $y_2$  может быть любым (0 или 1), всего 2 решения, и оба они соответствуют паре  $(x_3, x_4) = (1,1)$ :



10) теперь обозначим через  $a, b, c$  и  $d$  число решений, соответствующих связующим парам  $(0,0), (0,1), (1,0)$  и  $(1,1)$ , соответственно

11) как видно из схемы, при подключении нового уравнения эти значения преобразуются по рекуррентным формулам:

$$\tilde{a} = 2c, \tilde{b} = 2c, \tilde{c} = b, \tilde{d} = b + 2d$$

12) используя эти формулы, заполняем таблицу, начиная со всех значений, равных 1:

Число уравнений	0	1	2	3	4
$a$	1	2	2	4	4
$b$	1	2	2	4	4
$c$	1	1	2	2	4
$d$	1	3	8	18	40

13) итак, мы получили, что система из первых четырёх уравнений имеет всего  $4+4+4+40=52$  решения; теперь подключаем пятое уравнение, которое связано с первыми четырьмя через пару  $(x_5, x_6)$ :

$$(x_5 + x_6) \cdot (x_5 + y_5) = 1$$

14) заметим, что последнее, 6-е уравнение, связано с предыдущими только через  $x_6$ , поэтому,

подключая 5-е уравнение, строим отображение пары  $(x_5, x_6)$  на  $x_6$ :

при  $(x_5, x_6) = (0,0)$  решений нет

при  $(x_5, x_6) = (0,1)$  одно решение ( $y_5 = 1$ ), отображается на  $x_6 = 1$

при  $(x_5, x_6) = (1,0)$  два решения ( $y_5 = 0,1$ ), оба при  $x_6 = 0$

при  $(x_5, x_6) = (1,1)$  два решения ( $y_5 = 0,1$ ), оба при  $x_6 = 1$

15) из таблицы (см. выше) следует, что система из 4-х уравнений имеет 4 решения при

$(x_5, x_6) = (0,0)$ , которые не дают решений системы из 5 уравнений;

4 решения при  $(x_5, x_6) = (0,1)$ , которые дают по 1 решению (всего 4 при  $x_6 = 1$ );

4 решения при  $(x_5, x_6) = (1,0)$ , которые дают по 2 решения (всего 8 при  $x_6 = 0$ );

40 решений при  $(x_5, x_6) = (1,1)$ , которые дают по 2 решения (всего 80 при  $x_6 = 1$ );

16) всего получаем 8 решений при  $x_6 = 0$  и 84 решения при  $x_6 = 1$ ;

17) теперь подключаем 6-е уравнение

$$x_6 + y_6 = 1$$

18) при  $x_6 = 0$  это уравнение имеет одно решение ( $y_6 = 1$ ), поэтому вся система уравнений имеет 8 решений с  $x_6 = 0$

19) при  $x_6 = 1$  последнее уравнение имеет два решения ( $y_6 = 0,1$ ), поэтому вся система уравнений имеет  $2 \cdot 84 = 168$  решений с  $x_6 = 1$

20) Ответ:  $8 + 168 = 176$ .

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) = 1$$

$$\neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 = 1$$

$$\neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 = 1$$

$$\neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 = 1$$

где  $x_1, \dots, x_3, y_1, \dots, y_3, z_1, \dots, z_3$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

### Решение (последовательное подключение уравнений):

1) перепишем уравнения с помощью более простых обозначений:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) = 1$$

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

$$\bar{x}_3 \cdot y_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot \bar{y}_3 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_3 \cdot \bar{z}_3 = 1$$

2) заметим, что последние 3 уравнения независимы друга от друга, и вся система связана только через первое уравнение

3) рассмотрим второе уравнение

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

оно имеет три решения, каждое из которых соответствует единичному значению одного из слагаемых:

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 1 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$$

$$x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 = 1 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (1,0,1)$$

$$x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (1,1,0)$$

- 4) аналогичные уравнения 3-4 тоже имеют по три решения  
 5) теперь рассмотрим множество решений системы уравнений 2-3

$$\bar{x}_1 \cdot y_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot \bar{y}_1 \cdot z_1 + x_1 \cdot y_1 \cdot \bar{z}_1 = 1$$

$$\bar{x}_2 \cdot y_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$$

при ограничении, которое накладывается первым уравнением:

$$(x_1 \rightarrow x_2) = 1$$

- 6) поскольку импликация дает ложное значение (0) только для случая  $1 \rightarrow 0$ , первое уравнение в исходной системе запрещает комбинацию  $(x_1, x_2) = (1,0)$ .  
 7) рассмотрим решение уравнений 2 и 3:

$(x_1, y_1, z_1)$	$(x_2, y_2, z_2)$
(0,1,1)	(0,1,1)
(1,0,1)	(1,0,1)
(1,1,0)	(1,1,0)

Эти уравнения независимы, поэтому система уравнений 2-3 (без дополнительных ограничений) имеет  $3 \cdot 3 = 9$  решений

При ограничении  $(x_1 \rightarrow x_2) = 1$ :

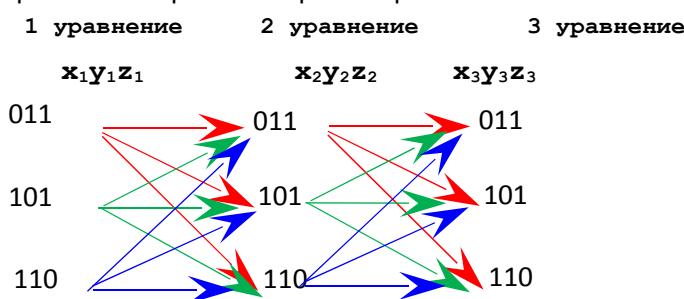
- в случае  $(x_2, y_2, z_2) = (0,1,1)$  имеем только одно решение системы, когда  $x_1 = 0$  в уравнении 2, то есть  $(x_1, y_1, z_1) = (0,1,1)$
- для двух решений уравнения 3, когда  $x_2 = 1$ , подходят все 3 отдельных решения уравнения 2

поэтому количество решений системы уравнений 2-3 при ограничении  $(x_1 \rightarrow x_2) = 1$  вычисляется как  $1 + 3 + 3 = 7$  решений

- 8) рассуждая аналогично, подключаем уравнение 4 и ограничение  $(x_2 \rightarrow x_3) = 1$ , получаем, что количество решений системы уравнений 2-4 при ограничении  $(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) = 1$  вычисляется как  $1 + 7 + 7 = 15$  решений  
 9) Ответ: 15.

**Решение (метод отображений, решение А.Н. Носкина):**

- 1) п. 1-4 совпадают с предыдущим вариантом решения  
 2) построим правило отображения троек переменных.



Если бы не было никаких ограничений, то данная система имела бы 9 решений.

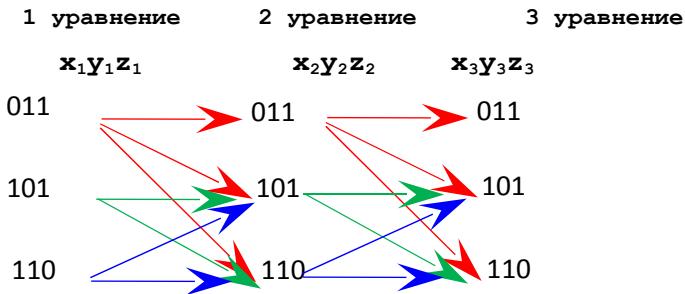
- 3) так как система имеет ограничения в виде первого уравнения,

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) = 1$$

то убираем все связи где выше указанные импликации ложны, а именно:

для  $(x_1 \rightarrow x_2)$ :  $x_1 = 1, x_2 = 0$ ,

$$(x_2 \rightarrow x_3) : x_2 = 1, x_3 = 0.$$



- 4) Заполняем таблицу, вычисляя количество решений при подключении каждого последующего уравнения.

<b>xyz</b>	<b>1 уравнение</b>	<b>2 уравнение</b>	<b>3 уравнение</b>
011	1	1	1
101	1	3	7
110	1	3	7

5) Складываем все результаты:  $1 + 7 + 7 = 15$ .

6) Ответ: 15.

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned} \neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_1 \equiv x_3) \wedge (x_2 \equiv x_3) &= 0 \\ \neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_3 \equiv x_5) \wedge (x_4 \equiv x_5) &= 0 \\ \neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_5 \equiv x_7) \wedge (x_6 \equiv x_7) &= 0 \\ \neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_7 \equiv x_9) \wedge (x_8 \equiv x_9) &= 0 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_9$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

### Решение (последовательное включение уравнений):

- 7) заметим два важных момента:
  - 1) все 4 уравнения – однотипные
  - 2) первое связано со вторым только через переменную  $x_3$ , второе с третьим – только через  $x_5$ , третье с четвёртым – только через  $x_7$
- 8) разберем подробно одно первое уравнение; поскольку в нем используется операция И (конъюнкция) и правая часть равна нулю (ложное значение), имеет смысл проверить ситуации, когда первое уравнение истинно: это будет тогда, когда  $x_2 \equiv x_3$ , а  $x_1$  не равно этому значению, то есть в двух случаях:  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$  и  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$
- 9) поскольку логическое уравнение с тремя переменными может иметь не более  $8 = 2^3$  решений, вычитаем два решения из этого количества и находим, что первое уравнение имеет  $8 - 2 = 6$  решений, причем в трёх из них  $x_3 = 0$ , а в трёх других  $x_3 = 1$ .
- 10) подключаем второе уравнение: для каждого из трёх решений первого при  $x_3 = 0$  получаем три решения второго, и для каждого из трёх решений первого при  $x_3 = 1$  получаем ещё три решения второго, всего система из двух уравнений имеет  $3*3 + 3*3 = 18$  решений
- 11) далее продолжаем таблицу:

число уравнений	решений
1	$3_{(\text{при } x_3=0)} + 3_{(\text{при } x_3=1)} = 6$
2	$3*3 + 3*3 = 9_{(\text{при } x_5=0)} + 9_{(\text{при } x_5=1)} = 18$
3	$9*3 + 9*3 = 27_{(\text{при } x_7=0)} + 27_{(\text{при } x_7=1)} = 54$

4

$$27 \cdot 3 + 27 \cdot 3 = 81 + 81 = 162$$

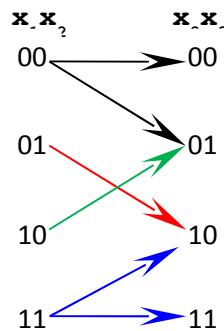
12) Ответ: 162

**Решение (метод отображений<sup>1</sup>, решение А.Н. Носкина):**

- 1) сначала построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_3$ , поскольку в первом логическом уравнении три переменных, то таблица будет иметь 8 строк ( $8 = 2^3$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_3$ , при которых первое уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0
	1	1
1	0	0
	1	1

- 2) анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных (например паре  $x_1x_2=00$  соответствуют пары  $x_2x_3= 00$  и  $01$ ).

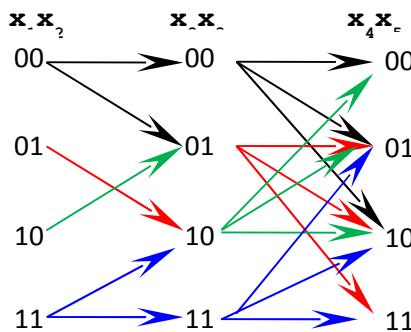


- 3) теперь построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_3, x_4, x_5$ , поскольку во втором логическом уравнении три переменных, то таблица будет иметь 8 строк ( $8 = 2^3$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_5$ , при которых второе уравнение не имеет решения.

$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	0	0
	1	1
1	0	0
	1	1

- 4) анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных, связывая с переменными первого логического уравнения

<sup>1</sup> Метод отображений предложен Ел.А. Мирончик и Ек.А. Мирончик (<http://kpolyakov.spb.ru/download/b15mirn.zip>).



- 13) Заполняем таблицу, вычисляя количество пар переменных, при котором система имеет решение.

	$x_1x_2$	$x_2x_3$	$x_4x_5$	$x_6x_7$	$x_8x_9$
00	1	1	3	9	27
01	1	2	6	18	54
10	1	2	6	18	54
11	1	1	3	9	27

14) Складываем все результаты:  $27 + 54 + 54 + 27 = 162$

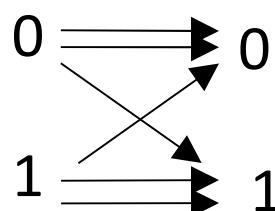
15) Ответ: 162.

**Решение (метод отображений, решение Ел.А. Мирончик):**

- 1) для построения отображения построим таблицу решения первого уравнения:

$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0
	1	1
	1	0
1	0	1
	1	0
		1

- 2) уравнения связаны только через одну переменную, значит множество значений переменной  $x_1$  приведет к множеству значений переменной  $x_3$  это отображение повторится на переходе от  $x_3$  к  $x_5$ , далее к  $x_7$  и  $x_9$
- 3) построим отображение:



- 4) в таблицу необходимо включить переменные  $x_1, x_3, x_5, x_7$  и  $x_9$ ; на старте имеем одно значение  $x_1=0$  и одно значение  $x_1=1$

	$x_1$	$x_3$	$x_5$	$x_7$	$x_9$
0	1	3	9	27	81
1	1	3	9	27	81

5) складываем все результаты:  $81 + 81 = 162$

6) ответ: 162.

**Ещё пример задания:**

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение (метод замены переменных):**

- 1) используем замену переменных (заметим, что каждая из новых переменных независима от других, это важно!):

$$Y_1 = x_1 \rightarrow x_2, \quad Y_2 = x_3 \rightarrow x_4, \quad Y_3 = x_5 \rightarrow x_6$$

тогда система запишется в виде

$$Y_1 \rightarrow Y_2 = 1$$

$$Y_2 \rightarrow Y_3 = 1$$

- 2) можно объединить эти уравнения в одно

$$(Y_1 \rightarrow Y_2) \wedge (Y_2 \rightarrow Y_3) = 1$$

для того, чтобы это равенство было выполнено, ни одно из импликаций не должна быть ложной, то есть в битовой цепочке, составленной из значений переменных  $Y_1, Y_2, Y_3$ , не должно быть последовательности «10»; вот все возможные варианты:

$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$
0	0	0
0	0	1
0	1	1
1	1	1

- 3) теперь вернемся к исходным переменным; импликация  $x_1 \rightarrow x_2$  дает 0 при одном наборе исходных переменных  $(x_1, x_2) = (1,0)$  и 1 при трёх наборах  $(x_1, x_2) = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$
- 4) учитывая, что каждая из новых переменных  $Y_1, Y_2, Y_3$ , независима от других; для каждой строки полученной таблицы просто перемножаем количество вариантов комбинации исходных переменных:

$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	вариантов
0	0	0	$1*1*1=1$
0	0	1	$1*1*3=3$
0	1	1	$1*3*3=9$
1	1	1	$3*3*3=27$

- 5) складываем все результаты:  $1 + 3 + 9 + 27 = 40$   
 6) Ответ: 40.

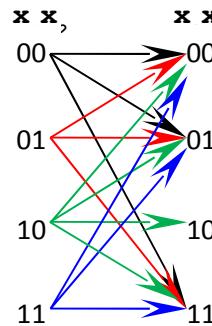
**Решение (метод отображений, решение А.Н. Носкина):**

- 1) сначала построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , поскольку в первом логическом уравнении четыре переменных, то таблица будет иметь 16 строк ( $16=2^4$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_4$ , при которых первое уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	0	0
		1	1
	1	0	0
		1	1
1	0	0	0

			1
		1	0
			1
	1	0	0
			1
1		1	0
			1

- 2) анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных  
(например паре  $x_1x_2=00$  соответствуют пары  $x_3x_4 = 00, 01 и 11).$



- 3) заполняем таблицу, вычисляя количество пар переменных, при котором система имеет решение.

	$x_1x_2$	$x_3x_4$	$x_5x_6$
00	1	4	13
01	1	4	13
10	1	1	1
11	1	4	13

- 4) складываем все результаты:  $13 + 13 + 1 + 13 = 40$   
5) Ответ: 40.

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) &= 1 \\
 (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) &= 1 \\
 (\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg y_4 \vee x_4) &= 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_4$  и  $y_1, y_2, \dots, y_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

### Решение:

- 1) видим, что первые два уравнения независимы друг от друга (в первое входят только  $x_1, x_2, \dots, x_4$ , а во второе – только  $y_1, y_2, \dots, y_4$ )
- 2) третье уравнение связывает первые два, поэтому можно поступить так:
  - найти решения первого уравнения
  - найти решения второго уравнения
  - найти множество решений первых двух уравнений
  - из множества решений первых двух уравнений выкинуть те, которые не удовлетворяют последнему уравнению
- 3) найдем решения первого уравнения; каждая из логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_4$  может принимать только два значения: «ложь» (0) и «истина» (1), поэтому решение первого уравнения можно записать как битовую цепочку длиной 4 бита: например, 0011 означает, что

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 0 \text{ и } \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_4 = 1$$

- 4) вспомним, что импликация  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$  ложна только для  $\mathbf{x}_1 = 1$  и  $\mathbf{x}_2 = 0$ , поэтому битовая цепочка, представляющая собой решение первого уравнения, не должна содержать сочетания «10»; это дает такие решения (других нет!):

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = 0000 \quad 0001 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1111$$

- 5) видим, что второе уравнение полностью совпадает по форме с первым, поэтому все его решения:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) = 0000 \quad 0001 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1111$$

- 6) поскольку первые два уравнения независимы друг от друга, система из первых двух уравнений имеет  $5 \cdot 5 = 25$  решений: каждому решению первого соответствует 5 разных комбинаций переменных  $y_1, y_2, \dots, y_4$ , которые решают второе, и наоборот, каждому решению второго соответствует 5 разных комбинаций переменных  $x_1, x_2, \dots, x_4$ , которые решают первое:

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) &= 0000 \quad 0001 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1111 \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &= 0000 \quad 0000 \quad 0000 \quad 0000 \quad 0000 \\ &\quad 0001 \quad 0001 \quad 0001 \quad 0001 \quad 0001 \\ &\quad 0011 \quad 0011 \quad 0011 \quad 0011 \quad 0011 \\ &\quad 0111 \quad 0111 \quad 0111 \quad 0111 \quad 0111 \\ &\quad 1111 \quad 1111 \quad 1111 \quad 1111 \quad 1111 \end{aligned}$$

- 7) теперь проверим, какие ограничения накладывает третье уравнение; вспомнив формулу, которая представляет импликацию через операции «НЕ» и «ИЛИ» ( $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ ), можно переписать третье уравнение в виде

$$(\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{y}_3 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{y}_4 \rightarrow \mathbf{x}_4) = 1$$

- 8) импликация  $\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1$  ложна только для  $\mathbf{y}_1 = 1$  и  $\mathbf{x}_1 = 0$ , следовательно, такая комбинация запрещена, потому что нарушает третье уравнение; таким образом, набору с  $\mathbf{y}_1 = 1$ :

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) = 1111$$

соответствует, с учетом третьего уравнения, только одно решение первого, в котором  $\mathbf{x}_1 = 1$

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = 1111$$

поэтому множество решений «редеет»:

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) &= 0000 \quad 0001 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1111 \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &= 0000 \quad 0000 \quad 0000 \quad 0000 \\ &\quad 0001 \quad 0001 \quad 0001 \quad 0001 \\ &\quad 0011 \quad 0011 \quad 0011 \quad 0011 \\ &\quad 0111 \quad 0111 \quad 0111 \quad 0111 \\ &\quad 1111 \quad 1111 \quad 1111 \quad 1111 \end{aligned}$$

- 9) аналогично двигаемся дальше по третьему уравнению; второй сомножитель равен 0, если импликация  $\mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{x}_2$  ложна, то есть только для  $\mathbf{y}_2 = 1$  и  $\mathbf{x}_2 = 0$ , это «прореживает» предпоследний столбец:

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) &= 0000 \quad 0001 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1111 \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &= 0000 \quad 0000 \quad 0000 \\ &\quad 0001 \quad 0001 \quad 0001 \\ &\quad 0011 \quad 0011 \quad 0011 \\ &\quad 0111 \quad 0111 \quad 0111 \\ &\quad 1111 \quad 1111 \quad 1111 \end{aligned}$$

- 10) аналогично проверяем еще два ограничения, отбрасывая все решения, для которых  $\mathbf{y}_3 = 1$  и  $\mathbf{x}_3 = 0$ , а также все решения, для которых  $\mathbf{y}_4 = 1$  и  $\mathbf{x}_4 = 0$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) &= 0000 \quad 0001 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1111 \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &= 0000 \end{aligned}$$

0001	0001			
0011	0011	0011		
0111	0111	0111	0111	
1111	1111	1111	1111	1111

- 11) итак, остается одно решение при  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 1111$ , два решения при  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0111$ , три решения при  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0011$ , четыре решения при  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0001$  и 5 решений при  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0000$
- 12) всего решений  $1+2+3+4+5=15$ .

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$x_1 \rightarrow x_2 \vee x_3 \wedge \neg x_4 = 1$$

$$x_3 \rightarrow x_4 \vee x_5 \wedge \neg x_6 = 1$$

$$x_5 \rightarrow x_6 \vee x_1 \wedge \neg x_2 = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

#### Решение:

- 1) перепишем уравнения в более простом виде, заменим знаки  $\vee$  и  $\wedge$  соответственно на (логические) сложение и умножение:

$$X_1 \rightarrow X_2 + X_3 \cdot \overline{X}_4 = 1$$

$$X_3 \rightarrow X_4 + X_5 \cdot \overline{X}_6 = 1$$

$$X_5 \rightarrow X_6 + X_1 \cdot \overline{X}_2 = 1$$

- 2) вспомним, что сначала выполняется логическое умножение, потом логические сложение и только потом – импликация, поэтому уравнения можно переписать в виде

$$X_1 \rightarrow (X_2 + X_3 \cdot \overline{X}_4) = 1$$

$$X_3 \rightarrow (X_4 + X_5 \cdot \overline{X}_6) = 1$$

$$X_5 \rightarrow (X_6 + X_1 \cdot \overline{X}_2) = 1$$

- 3) раскрывая импликацию по формуле  $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ , получаем

$$\overline{X}_1 + X_2 + X_3 \cdot \overline{X}_4 = 1$$

$$\overline{X}_3 + X_4 + X_5 \cdot \overline{X}_6 = 1$$

$$\overline{X}_5 + X_6 + X_1 \cdot \overline{X}_2 = 1$$

- 4) далее замечаем, что  $\overline{X}_1 + X_2 = \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2$ ,  $\overline{X}_3 + X_4 = \overline{X}_3 \cdot \overline{X}_4$  и  $\overline{X}_5 + X_6 = \overline{X}_5 \cdot \overline{X}_6$ , поэтому можно ввести новые переменные  $Y_1 = \overline{X}_1 + X_2$ ,  $Y_2 = \overline{X}_3 + X_4$  и  $Y_3 = \overline{X}_5 + X_6$ , и переписать уравнения в виде

$$Y_1 + \overline{Y}_2 = 1$$

$$Y_2 + \overline{Y}_3 = 1$$

$$Y_3 + \overline{Y}_1 = 1$$

- 5) пусть  $Y_1 = 0$ , тогда из первого уравнения сразу имеем  $Y_2 = 0$  и далее из второго  $Y_3 = 0$ ; при этом третье автоматически выполняется; получили одно решение

- 6) теперь пусть  $Y_1 = 1$ , тогда из последнего уравнения имеем  $Y_3 = 1$ , а из второго –  $Y_2 = 1$ , при этом первое уравнение справедливо
- 7) таким образом, система уравнений относительно переменных  $Y_1, Y_2, Y_3$  имеет два решения:  $(0,0,0)$  и  $(1,1,1)$
- 8) теперь вернемся обратно к исходным переменным; значению  $Y_1 = 0$  соответствует единственный вариант  $X_1 = 1, X_2 = 0$ ; значению  $Y_1 = 1$  соответствуют остальные 3 пары возможных значений  $(X_1, X_2)$
- 9) то же самое можно сказать про  $Y_2$  и  $Y_3$ : нулевое значение дает один набор соответствующих исходных переменных, а единичное – три
- 10) переменные  $Y_1, Y_2$  и  $Y_3$  независимы друг от друга, так как каждая из них составлена из разных X-переменных, поэтому Y-решение  $(0,0,0)$  (см. п. 7) дает только одно X-решение, а Y-решение  $(1,1,1)$  –  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  решений
- 11) всего решений  $1 + 27 = 28$ .

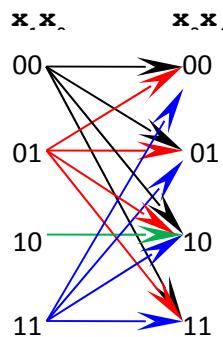
**Решение (метод отображений<sup>2</sup>, решение А.Н. Носкина):**

- 1) сначала построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , поскольку в первом логическом уравнении четыре переменных, то таблица будет иметь 16 строк ( $16=2^4$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_3, x_4$ , при которых первое уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	0	0
		0	1
		1	0
		1	1
	1	0	0
		0	1
		1	0
		1	1
1	0	0	0
		0	1
		1	0
		1	1
	1	0	0
		0	1
		1	0
		1	1

- 2) Анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных  
(например, паре  $x_1, x_2 = 10$  соответствует только пара  $x_3, x_4 = 10$ ).
- Внимание!** Для пары  $x_1, x_2 = 10$  нет связей  $x_3, x_4 = 00, 10$  и  $11$

<sup>2</sup> Метод отображений предложен Ел.А. Мирончик и Ек.А. Мирончик (<http://kpolyakov.spb.ru/download/b15mirn.zip>).



- 3) теперь рассмотрим, как влияет на правило отображения третье уравнение. Для этого построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_5, x_6$ .

Уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_6$ , при которых третье уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_5$	$x_6$
0	0	0	0
		1	1
	1	0	0
		1	1
	0	0	0
		1	1
1	1	0	0
		1	1
	0	0	0
		1	1
	1	0	0
		1	1

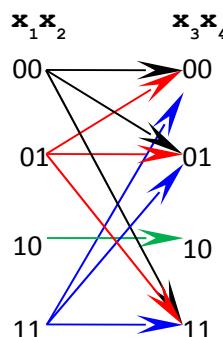
Анализ таблицы показывает, что еще исключаются 3 связи, а именно для пары

$x_1x_2 = 00$  нет связей с  $x_5x_6 = 10$

$x_1x_2 = 01$  нет связей с  $x_5x_6 = 10$

$x_1x_2 = 10$  нет связей с  $x_5x_6 = 10$

- 4) На основе выше сказанного уточним ранее приведенное правило отображения пар переменных, исключив три лишних связи.



- 5) заполняем таблицу, вычисляя количество пар переменных, при котором система имеет решение:

	$x_1x_2$	$x_3x_4$	$x_5x_6$
00	1	3	9

01	1	3	9
10	1	1	1
11	1	3	9

- 6) складываем все результаты:  $9 + 9 + 1 + 9 = 28$ .  
 7) Ответ: 28.

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение (вариант 1, табличный метод, динамическое программирование):**

- 1) в левой части заданного уравнения стоят последовательно несколько операций импликации, скобок нет, поэтому порядок выполнения операций определяется приоритетом этих операций; в данном случае все операции имеют одинаковый приоритет
- 2) операции, имеющие одинаковый приоритет, выполняются слева направо, то есть первой выполняется импликация  $x_1 \rightarrow x_2$ , а последней – последняя импликация  $((((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow x_4) \rightarrow x_5) \rightarrow x_6$
- 3) каждая логическая переменная может принимать значение «истина» (1) или «ложь» (0)
- 4) для набора из 6 независимых логических переменных существует  $2^6 = 64$  разных комбинаций значений этих переменных
- 5) рассмотрим первую импликацию,  $x_1 \rightarrow x_2$ ; она дает в трёх случаях 1, и в одном – 0:

$x_1$	$x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 6) посмотрим, как меняется количество решений, если «подключить» следующую переменную;
  - если  $x_1=0$ , то  $x_1 \rightarrow x_2 = 1$  (из  $K$  нулей получаются  $2K$  единиц)
  - если  $x_1=1$ , то  $x_1 \rightarrow x_2 = 0$  при  $x_2=0$  и  $x_1 \rightarrow x_2 = 1$  при  $x_2=1$  (из  $K$  единиц получаются  $K$  нулей и  $K$  единиц)
- 7) исходя из этого, можно составить формулы для вычисления количества нулей  $N_i$  и количества единиц  $E_i$  для уравнения с  $i$  переменными:

$$N_i = E_{i-1}, \quad E_i = 2N_{i-1} + E_{i-1}$$

- 8) для одной переменной имеем 1 ноль и 1 единицу, поэтому начальные условия для расчёта:  $N_1 = E_1 = 1$
- 9) составим таблицу, которую будем заполнять слева направо, вычисляя число нулей и единиц по приведенным выше формулам; в таблице показано, как строится следующий столбец таблицы для  $i = 4$ :

число переменных 1 2 3 4 5 6 нулей  
 1 1 3 5 1 1 2 1 1 единиц 13  $3+5=11$  2 1 4 3



- 10) таким образом, ответ: 43 решения.

**Решение (вариант 2, «с хвоста»):**

- 1) те же рассуждения, что и в п. 1-4 решения по варианту 1
- 2) если  $X_6 = 1$ , то левая часть уравнения равна 1, то есть равенство выполняется; комбинаций с  $X_6 = 1$  ровно половина от общего количества, то есть **32**
- 3) теперь проверяем варианты с  $X_6 = 0$ ; сразу получаем, что для выполнения заданного уравнения нужно, чтобы  $(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5) = 0$ ; иначе получим  $1 \rightarrow X_6 = 1 \rightarrow 0 = 0$
- 4) проверим отдельно случаи  $X_5 = 0$  и  $X_5 = 1$
- 5) пусть  $X_6 = 0$  и  $X_5 = 1$ ; в этом случае никогда не будет выполнено условие  $(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5) = 0$ , решений нет
- 6) пусть  $X_6 = X_5 = 0$ ; в этом случае условие  $(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5) = 0$  выполняется только при  $(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4) = 1$ ; если  $X_4 = 1$ , это условие всегда верно, поэтому получаем еще **8** решений – 8 комбинаций, где  $X_6 = X_5 = 0$  и  $X_4 = 1$  (1/8 всех комбинаций)
- 7) теперь рассмотрим случаи, когда  $X_6 = X_5 = X_4 = 0$ ; рассуждая аналогично, находим, что условие  $(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow 0) = 1$  верно при  $(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3) = 0$ , это сразу дает  $X_3 = 0$  и  $(X_1 \rightarrow X_2) = 1$
- 8) при всех известных значениях остальных переменных ( $X_6 = X_5 = X_4 = X_3 = 0$ ) условие  $(X_1 \rightarrow X_2) = 1$  истинно в трёх случаях:  $(X_1, X_2) = (0,0), (0,1)$  и  $(1,1)$ , это дает еще **3** решения
- 9) таким образом, ответ:  $32 + 8 + 3 = 43$  решения.

**Решение (вариант 3, ещё раз с хвоста):**

- 1) те же рассуждения, что и в п. 1-4 решения по варианту 1
- 2) число решений такого уравнения с  $n$  неизвестными обозначим через  $K_n$ . Число решений аналогичного уравнения с нулем в правой части обозначим через  $Z_n$ . Тогда  $K_6 = 2^6 - Z_6$ .
- 3) теперь найдем  $Z_6$ : необходимо, чтобы  $X_6 = 0$  и  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5 = 1$ , то есть  $Z_6 = K_5 = 2^5 - Z_5$ .
- 4) аналогично для любого  $n > 1$  получаем формулу:  $Z_n = K_{n-1} = 2^{n-1} - Z_{n-1}$
- 5) конечная точка рекурсии, очевидно,  $Z_1 = 1$ .
- 6) откатываясь назад, находим, что
 
$$\begin{aligned}Z_2 &= K_1 = 2^1 - Z_1 = 2 - 1 = 1 \\Z_3 &= K_2 = 2^2 - Z_2 = 4 - 1 = 3 \\Z_4 &= K_3 = 2^3 - Z_3 = 8 - 3 = 5 \\Z_5 &= K_4 = 2^4 - Z_4 = 16 - 5 = 11 \\Z_6 &= K_5 = 2^5 - Z_5 = 32 - 11 = 21 \\Z_7 &= K_6 = 2^6 - Z_6 = 64 - 21 = 43\end{aligned}$$
- 7) таким образом, ответ: **43 решения.**

**Решение (вариант 4, приведение к базису «И-ИЛИ-НЕ», Е.Н. Смирнова):**

- 8) те же рассуждения, что и в п. 1-4 решения по варианту 1
- 9) заменяем импликацию по формуле  $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ ; на первом шаге получаем

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5 \rightarrow X_6 = \overline{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5} + X_6$$

- 10) далее по той же формуле

$$\overline{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_5} + X_6 = \overline{\overline{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4} + X_5} + X_6$$

инверсию в первом слагаемом раскроем по закону де Моргана ( $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ):

$$\overline{\overline{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4}} + X_5 + X_6 = (X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4) \cdot \overline{X_5} + X_6$$

- 11) сделав те же операции с оставшейся скобкой, получаем

$$(X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4) \cdot \overline{X_5} + X_6 = ((X_1 \rightarrow X_2) \cdot \overline{X_3} + X_4) \cdot \overline{X_5} + X_6$$

- 12) и, применяя ту же формулу еще раз, получим уравнение

$$((\bar{X}_1 + X_2) \cdot \bar{X}_3 + X_4) \cdot \bar{X}_5 + X_6 = 1$$

- 13) при  $X_6 = 1$  остальные 5 переменных можно выбирать любым способом, это дает  $2^5 = 32$  решения
- 14) при  $X_6 = 0$  и  $X_5 = 1$  решений нет
- 15) при  $X_6 = X_5 = 0$  получаем  $2^3 = 8$  решений при  $X_4 = 1$  (можно выбирать  $X_1, X_2$  и  $X_3$  произвольно)
- 16) при  $X_6 = X_5 = X_4 = 0$  сразу находим, что  $X_3 = 0$ , это дает еще 3 решения, при которых истинно выражение  $X_1 \rightarrow X_2 = \bar{X}_1 + X_2$
- 17) таким образом, ответ:  $32 + 8 + 3 = 43$  решения.

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$x_1 \vee x_2 \wedge x_3 = 1$$

$$x_2 \vee x_3 \wedge x_4 = 1$$

...

$$x_8 \vee x_9 \wedge x_{10} = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

#### Решение (последовательное подключение уравнений):

- 1) рассмотрим сначала все решения первого уравнения; его левая часть истинна, когда  $x_1=1$  (при этом  $x_2$  и  $x_3$  могут быть любыми), а также когда  $x_1=0$  и  $x_2=x_3=1$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

- 2) заметим, что первое и второе уравнения связаны через последние две переменных, в данном случае это  $x_2$  и  $x_3$

- 3) пусть  $i$  – число переменных в уравнениях; введем обозначения:

$K_i$  – количество решений, в которых последние две переменные принимают значения (0,0)

$L_i$  – количество решений, в которых последние две переменные принимают значения (0,1)

$M_i$  – количество решений, в которых последние две переменные принимают значения (1,0)

$N_i$  – количество решений, в которых последние две переменные принимают значения (1,1)

- 4) из таблицы видим, что  $K_3=1$ ,  $L_3=1$ ,  $M_3=1$  и  $N_3=2$

- 5) теперь подключаем второе уравнение; посмотрим, к чему приводят разные комбинации последних двух переменных:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	1	1	0
			1
1	0	0	✗

1	0	1	1
1	1	0	0
			1
1	1	1	0

6) находим, что

комбинация (0,0) не дает ни одного решения,

комбинация (0,1) дает одно решение, и при этом  $(x_3, x_4) = (1,1)$

комбинация (1,0) дает два решения, причем  $(x_3, x_4) = (0,0)$  или  $(0,1)$

комбинация (1,1) дает два решения, причем  $(x_3, x_4) = (1,0)$  или  $(1,1)$

7) из предыдущего пункта делаем вывод, что

$K_{i+1} = M_i$  (комбинация (0,0) появилась из (1,0) на предыдущем шаге)

$L_{i+1} = M_i$  (комбинация (0,1) появилась из (1,0) на предыдущем шаге)

$M_{i+1} = N_i$  (комбинация (1,0) появилась из (1,1) на предыдущем шаге)

$N_{i+1} = L_i + N_i$  (комбинация (1,1) появляется из (0,1) и (1,1))

8) используя эти рекуррентные формулы, заполняем таблицу для  $i=4, \dots, 10$

i	K <sub>i</sub>	L <sub>i</sub>	M <sub>i</sub>	N <sub>i</sub>	Всего
3	1	1	1	2	5
4	1	1	2	3	7
5	2	2	3	4	11
6	3	3	4	6	16
7	4	4	6	9	23
8	6	6	9	13	34
9	9	9	13	19	50
10	13	13	19	28	73

9) таким образом, ответ:  $13 + 13 + 19 + 28 = 73$  решения.

**Решение (метод отображений<sup>3</sup>, решение А.Н. Носкина):**

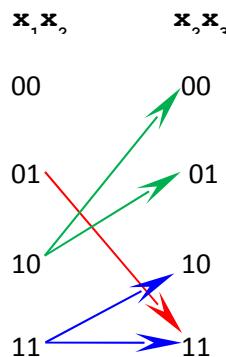
1) построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_3$ , поскольку в первом логическом уравнении три переменных, то таблица будет иметь 8 строк ( $8 = 2^3$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_2$  и  $x_3$ , при которых первое уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0
		1
	0	
		1
1	0	0
		1
	0	
		1

2) анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных

(например, паре  $x_1x_2 = 00$  не соответствуют ни одной пары  $x_2x_3$ , и наоборот паре  $x_1x_2 = 01$  соответствует только пара  $x_3x_4 = 11$ ).

<sup>3</sup> Метод отображений предложен Ел.А. Мирончик и Ек.А. Мирончик (<http://kpolyakov.spb.ru/download/b15mirn.zip>).



- 3) Заполняем таблицу, вычисляя количество пар переменных, при котором система имеет решение.

	$x_1x_2$	$x_2x_3$	$x_3x_4$	$x_4x_5$	$x_5x_6$	$x_6x_7$	$x_7x_8$	$x_8x_9$	$x_9x_{10}$
00	0	1	1	2	3	4	6	9	13
01	1	1	1	2	3	4	6	9	13
10	1	1	2	3	4	6	9	13	19
11	1	2	3	4	6	9	13	19	28

- 4) таким образом, ответ:  $13 + 13 + 19 + 28 = 73$  решения.

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_5 \vee x_6) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

#### Решение:

- 1) перепишем уравнение, заменив знаки логических операций:

$$(\overline{X_1} + X_2) \cdot (\overline{X_2} + X_3) \cdot (\overline{X_3} + X_4) \cdot (\overline{X_4} + X_5) \cdot (\overline{X_5} + X_6) = 1$$

- 2) учитывая, что  $\overline{A} + B = A \rightarrow B$ , заменяем все выражения в скобках на импликацию:

$$(X_1 \rightarrow X_2) \cdot (X_2 \rightarrow X_3) \cdot (X_3 \rightarrow X_4) \cdot (X_4 \rightarrow X_5) \cdot (X_5 \rightarrow X_6) = 1$$

- 3) решение уравнения можно записать в виде шести двоичных знаков, которые обозначают соответственно, переменные  $X_1 \dots X_6$
- 4) далее вспомним, что импликация дает ложное значение, если её первая часть (посылка) истинна, а вторая (следствие) ложно, поэтому из  $A \rightarrow B = 0$  сразу следует, что  $A = 1, B = 0$
- 5) это значит, что в исходном выражении появится нуль, если в цепочке битов, соответствующей значениям переменных, появится комбинация 10, то есть предыдущее значение истинно, а следующее за ним – ложно
- 6) поэтому решениями этого уравнения будут все комбинации значений переменных, для которых в соответствующей битовой цепочке нет последовательности 10;
- 7) таких цепочек всего 7:
- $$000000, 000001, 000011, 000111, 001111, 011111, 111111$$
- 8) таким образом, ответ: 7 решений.

### Ещё пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg x_1 \vee x_2 = 1$$

$$\neg x_2 \vee x_3 = 1$$

...

$$\neg x_9 \vee x_{10} = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение (последовательное решение, через единицы):**

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно  $2^{10} = 1024$ , поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) сначала рассмотрим первое уравнение  $\overline{X_1} + X_2 = 1$ ; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно имеет 3 решения (точнее, с учетом других переменных, 3 группы решений):  $(0,0,*), (0,1,*)$  и  $(1,1,*)$ ; здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми
- 3) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:  
 $(0,0,*)$   
 $(0,\underline{1},*)$   
 $(1,\underline{1},*)$
- 4) заметим, что при  $X_2 = 0$  значение  $X_1$  должно быть равно 0, а при  $X_2 = 1$  значение  $X_1$  может быть любым
- 5) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже имеет 3 группы решений:  $(x_1,0,0,*), (x_1,0,1,*)$  и  $(x_1,1,1,*),$  где  $x_1$  – некоторое логическое значение переменной  $X_1$
- 6) решения системы первых двух уравнений – это те комбинации значений переменных, которые удовлетворяют одновременно и первому, и второму
- 7) из п. 4 следует, что при  $X_2 = 0$  значение  $X_1$  должно быть равно 0, а при  $X_2 = 1$  значение  $X_1$  может быть любым, поэтому решение системы двух первых уравнений включает 4 группы: из  $(x_1,0,0,*)$  и  $(x_1,0,1,*)$  при  $X_1 = 0$  получаем две группы  
 $(0,0,0,*)$  и  $(0,0,1,*)$   
и из  $(x_1,1,1,*)$  получается еще две:  
 $(0,1,1,*)$  и  $(1,1,1,*)$ .
- 8) таким образом, система из двух уравнений имеет 4 решения
- 9) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:  
 $(0,0,0,*)$   
 $(0,0,\underline{1},*)$   
 $(0,\underline{1},1,*)$   
 $(1,\underline{1},1,*)$
- 10) таким образом, если  $X_3 = 0$ , все предыдущие переменные определяются однозначно – они должны быть равны нулю (идем по системе «снизу вверх»); если же  $X_3 = 1$ , то предыдущие переменные могут быть любыми, второе уравнение их не ограничивает
- 11) поэтому при увеличении числа переменных на единицу количество решений также увеличивается на единицу
- 12) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений
- 13) таким образом, ответ: **11 решений.**

**Решение (последовательное решение, через нули):**

- 1) сначала рассмотрим первое уравнение  $\overline{X_1} + X_2 = 1$ ; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно НЕ выполняется только в одном случае (точнее, с учетом других переменных, для

- одной группы комбинаций):  $(1,0,*)$  здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми
- 2) общее количество комбинаций  $X_1$  и  $X_2$  равно  $2^2 = 4$ , поэтому число решений первого уравнения равно  $4 - 1 = 3$
  - 3) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже ложно только для одной комбинации имеет 3 группы решений:  $(x_1, 1, 0, *)$ , где  $x_1$  – некоторое логическое значение переменной  $X_1$
  - 4) теперь рассмотрим вместе первое и второе уравнения и определим, в скольких случаях хотя бы одно из них неверно
  - 5) множества  $(1,0,x_3,*)$  и  $(x_1,1,0,*)$  не пересекаются, потому что в первом  $X_2 = 0$ , а во втором  $X_2 = 1$ , поэтому система из двух уравнений не выполнена для 4-х комбинаций:  
 $(1,0,0,*), (1,0,1,*), (0,1,0,*)$  и  $(1,1,0,*)$
  - 6) общее количество комбинаций трех логических переменных равно  $2^3 = 8$ , поэтому количество решений системы из двух уравнений равно  $8 - 4 = 4$
  - 7) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений
  - 8) таким образом, ответ: **11 решений**.

#### Решение (табличный метод):

- 1) рассмотрим все решения первого уравнения  $\overline{X_1} + X_2 = 1$  по таблице истинности:

$\overline{X_1} + X_2 = 1$	$X_2$	$X_1$
1	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1

- 2) строка, выделенная красным фоном, не удовлетворяет условию, поэтому дальше ее рассматривать не будем
- 3) теперь подключаем третью переменную и второе уравнение:

$X_3$	$X_2$	$X_1$
?	0	0
?	1	0
?	1	1

- 4) при каких значениях переменной  $X_3$  будет верно условие  $\overline{X_2} + X_3 = 1$ ? Очевидно, что на это уже не влияет  $X_1$  (этот столбец выделен зеленым цветом). Если  $X_2 = 1$ , то сразу получаем, что  $X_3 = 1$  (иначе  $\overline{X_2} + X_3 = 0 + 0 = 0$ ):

$X_3$	$X_2$	$X_1$
0	0	0
1	0	0
1	1	0
1	1	1

- 5) как видно из таблицы, верхняя строка предыдущей таблицы (где были все нули) дает два решения при подключении очередного уравнения, а все остальные – по одному
- 6) понятно, что такая же ситуация будет продолжаться и дальше, то есть, при добавлении каждой новой переменной число решений увеличивается на 1
- 7) рассуждая таким образом и дальше, получаем, что для 3-х уравнений с 4-мя переменными будет 5 решений, для 4 уравнений – 6 решений, ..., а для 9 уравнений – 11 решений
- 8) обратите внимание на форму таблицы – единицы и нули образуют два треугольника
- 9) таким образом, ответ: **11 решений**.

**Рекомендации:**

- по-видимому, лучший способ решения задач этого типа основан на двух идеях:
  - замена переменных (если она возможна), позволяющая сократить количество неизвестных и таким образом упростить решение
  - последовательное решение уравнений, начиная с первого, затем система из первых двух, первых трех и т.д.
- для записи хода решения и минимизации путаницы лучше использовать табличный метод, при котором все переменные, от которых зависит очередное уравнение, размещены в крайних левых столбцах таблицы

**Еще пример задания:**

*Сколько различных решений имеет система уравнений*

$$\neg(X_1 \equiv X_2) \vee (X_3 \equiv X_4) = 1$$

$$\neg(X_3 \equiv X_4) \vee (X_5 \equiv X_6) = 1$$

$$\neg(X_5 \equiv X_6) \vee (X_7 \equiv X_8) = 1$$

$$\neg(X_7 \equiv X_8) \vee (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

*где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.*

**Решение:**

- количество комбинаций 10 логических переменных равно  $2^{10} = 1024$ , поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- заметим, что при обозначениях  $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$ ,  $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$ ,  $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$ ,  $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$  и  $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$  мы получаем систему из 4 уравнений и 5 независимыми переменными; эта система уравнений относится к типу, который рассмотрен в предыдущей разобранной задаче:

$$\neg Y_1 \vee Y_2 = 1$$

$$\neg Y_2 \vee Y_3 = 1$$

$$\neg Y_3 \vee Y_4 = 1$$

$$\neg Y_4 \vee Y_5 = 1$$

- как следует из разбора предыдущей задачи, такая система имеет  $5+1 = 6$  решений для переменных  $Y_1 \dots Y_5$
- теперь нужно получить количество решений в исходных переменных,  $X_1 \dots X_{10}$ ; для этого заметим, что переменные  $Y_1 \dots Y_5$  независимы;
- предположим, что значение  $Y_1$  известно (0 или 1); поскольку  $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$ , по таблице истинности операции «эквивалентность» (истина, когда два значения одинаковы), есть **две** соответствующих пары  $(X_1; X_2)$  (как для случая  $Y_1 = 0$ , так и для случая  $Y_1 = 1$ )
- у нас есть 5 переменных  $Y_1 \dots Y_5$ , каждая их комбинация дает 2 пары  $(X_1; X_2)$ , 2 пары  $(X_3; X_4)$ , 2 пары  $(X_5; X_6)$ , 2 пары  $(X_7; X_8)$  и 2 пары  $(X_9; X_{10})$ , то есть всего  $2^5 = 32$  комбинации исходных переменных
- таким образом, общее количество решений равно  $6 \cdot 32 = 192$
- ответ: **192 решения**

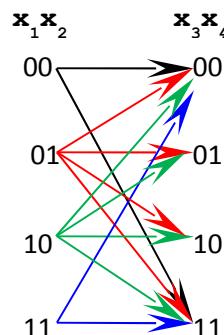
**Решение (метод отображений<sup>4</sup>, решение А.Н. Носкина):**

<sup>4</sup> Метод отображений предложен Ел.А. Мирончик и Ек.А. Мирончик (<http://kpolyakov.spb.ru/download/b15mirn.zip>).

- 1) сначала построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , поскольку в первом логическом уравнении четыре переменных, то таблица будет иметь 16 строк ( $16=2^4$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_4$ , при которых первое уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	0	0
		1	1
	1	0	0
		1	1
		0	0
		1	1
	1	0	0
		1	1

- 2) анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных (например, паре  $x_1x_2=00$  соответствуют пары  $x_3x_4=00$  и  $11$ , и наоборот, для пары  $x_1x_2=00$  нет связей  $x_3x_4=01$  и  $10$ ).



- 3) Заполняем таблицу, вычисляя количество пар переменных, при котором система имеет решение.

	$x_1x_2$	$x_3x_4$	$x_5x_6$	$x_7x_8$	$x_9x_{10}$
00	1	4	12	32	80
01	1	2	4	8	16
10	1	2	4	8	16
11	1	4	12	32	80

- 4) таким образом, ответ:  $80 + 16 + 16 + 80 = 192$  решения.

**Еще пример задания:**

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_3 \wedge \neg x_4) = 1$$

$$(x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_5 \wedge x_6) \vee (x_5 \wedge \neg x_6) = 1$$

$$(x_5 \wedge x_6) \vee (\neg x_5 \wedge \neg x_6) \vee (\neg x_7 \wedge x_8) \vee (x_7 \wedge \neg x_8) = 1$$

$$(x_7 \wedge x_8) \vee (\neg x_7 \wedge \neg x_8) \vee (\neg x_9 \wedge x_{10}) \vee (x_9 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение:**

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно  $2^{10} = 1024$ , поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) решать такую систему «в лоб» достаточно сложно, нужно попробовать ее упростить
- 3) заметим, что

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) = (x_1 \equiv x_2),$$

где символ  $\equiv$  означает операцию «эквивалентность» (значения равны);

- 4) кроме того,

$$(\neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_3 \wedge \neg x_4) = (x_3 \oplus x_4) = \neg(x_3 \equiv x_4),$$

где символ  $\oplus$  означает операцию «исключающее ИЛИ» (значения НЕ равны); это операция, обратная эквивалентности

- 5) используем замену переменных, выделив члены, объединяющие пары исходных переменных ( $X_1$  и  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$ ,  $X_5$  и  $X_6$ ,  $X_7$  и  $X_8$ ,  $X_9$  и  $X_{10}$ )

$$Y_1 = \neg(x_1 \equiv x_2)$$

$$Y_2 = \neg(x_3 \equiv x_4)$$

$$Y_3 = \neg(x_5 \equiv x_6)$$

$$Y_4 = \neg(x_7 \equiv x_8)$$

$$Y_5 = \neg(x_9 \equiv x_{10})$$

- 6) при этих обозначения система уравнений преобразуется к виду

$$\neg Y_1 \vee Y_2 = 1$$

$$\neg Y_2 \vee Y_3 = 1$$

$$\neg Y_3 \vee Y_4 = 1$$

$$\neg Y_4 \vee Y_5 = 1$$

- 9) как показано выше (при разборе пред-предыдущей задачи), такая система имеет  $5+1=6$  решений для независимых переменных  $Y_1 \dots Y_5$
- 10) предположим, что значение  $Y_1$  известно (0 или 1); поскольку  $Y_1 = \overline{(X_1 \equiv X_2)}$ , по таблице истинности операции «эквивалентность» есть **две** соответствующих пары  $(X_1; X_2)$  (как для случая  $Y_1 = 0$ , так и для случая  $Y_1 = 1$ )
- 11) у нас есть 5 переменных  $Y_1 \dots Y_5$ , каждая их комбинация дает 2 пары  $(X_1; X_2)$ , 2 пары  $(X_3; X_4)$ , 2 пары  $(X_5; X_6)$ , 2 пары  $(X_7; X_8)$  и 2 пары  $(X_9; X_{10})$ , то есть всего  $2^5 = 32$  комбинации исходных переменных
- 12) таким образом, общее количество решений равно  $6 \cdot 32 = 192$
- 7) ответ: **192 решения**

**Решение (метод отображений<sup>5</sup>, решение А.Н. Носкина):**

- 1) упростим систему уравнений, заметим, что

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) = (x_1 \equiv x_2),$$

где символ  $\equiv$  означает операцию «эквивалентность» (значения равны);

- 2) кроме того,

$$(\neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_3 \wedge \neg x_4) = (x_3 \oplus x_4) = \neg(x_3 \equiv x_4),$$

где символ  $\oplus$  означает операцию «исключающее ИЛИ» (значения НЕ равны); это операция, обратная эквивалентности;

- 3) при этих обозначения система уравнений преобразуется к виду

<sup>5</sup> Метод отображений предложен Ел.А. Мирончик и Ек.А. Мирончик (<http://kpolyakov.spb.ru/download/b15mirn.zip>).

$$(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_3 \equiv x_4) = 1$$

$$(x_3 \equiv x_4) \vee \neg(x_5 \equiv x_6) = 1$$

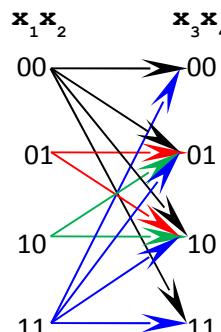
$$(x_5 \equiv x_6) \vee \neg(x_7 \equiv x_8) = 1$$

$$(x_7 \equiv x_8) \vee \neg(x_9 \equiv x_{10}) = 1$$

- 4) построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , поскольку в первом логическом уравнении четыре переменных, то таблица будет иметь 16 строк ( $16=2^4$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_4$ , при которых первое уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	0	0
		0	1
		1	0
		1	1
	1	0	0
		0	1
		1	0
		1	1
1	0	0	0
		0	1
		1	0
		1	1
	1	0	0
		0	1
		1	0
		1	1

- 5) анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных  
 (например, паре  $x_1x_2=01$  соответствуют пары  $x_3x_4 = 01$  и  $10$ , и, наоборот, для пары  $x_1x_2 = 01$  нет связей  $x_3x_4 = 00$  и  $11$ ).



- 6) заполняем таблицу, вычисляя количество пар переменных, при котором система имеет решение:

	$x_1x_2$	$x_3x_4$	$x_5x_6$	$x_7x_8$	$x_9x_{10}$
00	1	2	4	8	16
01	1	4	12	32	80
10	1	4	12	32	80
11	1	2	4	8	16

- 7) таким образом, ответ:  $16 + 80 + 80 + 16 = 192$  решения.

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((x_1 \equiv x_2) \wedge (x_3 \equiv x_4)) \vee (\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1$$

$$((X_3 \equiv X_4) \wedge (X_5 \equiv X_6)) \vee (\neg(X_3 \equiv X_4) \wedge \neg(X_5 \equiv X_6)) = 1$$

$$((X_5 \equiv X_6) \wedge (X_7 \equiv X_8)) \vee (\neg(X_5 \equiv X_6) \wedge \neg(X_7 \equiv X_8)) = 1$$

$$((X_7 \equiv X_8) \wedge (X_9 \equiv X_{10})) \vee (\neg(X_7 \equiv X_8) \wedge \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение:**

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно  $2^{10} = 1024$ , поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) решать такую систему «в лоб» достаточно сложно, нужно попробовать ее упростить
- 3) рассмотрим первое уравнение, заменив обозначения логических операций на более простые:

$$Y_1 \cdot Y_2 + \overline{Y}_1 \cdot \overline{Y}_2 = 1,$$

где  $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$  и  $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$ . Выражение в левой части последнего равенства – это операция эквивалентности между  $Y_1$  и  $Y_2$ , то есть первое уравнение запишется в виде

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$

- 4) аналогично, вводя обозначения  $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$ ,  $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$  и  $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$ , запишем исходную систему в виде

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$

$$(Y_2 \equiv Y_3) = 1$$

$$(Y_3 \equiv Y_4) = 1$$

$$(Y_4 \equiv Y_5) = 1$$

заметим, что все переменные здесь независимы друг от друга

- 13) найдем решение этой системы относительно **независимых** переменных  $Y_1 \dots Y_5$
- 14) первое уравнение имеет два решения (с учетом остальных переменных – две группы решений):  $(0,0,*)$  и  $(1,1,*)$ , где \* обозначает остальные переменные, которые могут быть любыми
- 15) второе уравнение тоже имеет две группы решений:  $(Y_1,0,0,*)$  и  $(Y_1,1,1,*)$ , где  $Y_1$  обозначает некоторое значение переменной  $Y_1$
- 16) теперь ищем решения, которые удовлетворяют и первому, и второму уравнению; очевидно, что их всего 2:  $(0,0,0,*)$  и  $(1,1,1,*)$
- 17) рассуждая дальше аналогичным образом, приходим к выводу, что система имеет всего два решения относительно переменных  $Y_1 \dots Y_5$ : все нули и все единицы
- 18) теперь нужно получить количество решений в исходных переменных,  $X_1 \dots X_{10}$ ; для этого вспомним, что переменные  $Y_1 \dots Y_5$  независимы;
- 19) предположим, что значение  $Y_1$  известно (0 или 1); поскольку  $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$ , по таблице истинности операции «эквивалентность» (истина, когда два значения одинаковы), есть **две** соответствующих пары  $(X_1;X_2)$  (как для случая  $Y_1 = 0$ , так и для случая  $Y_1 = 1$ )
- 20) у нас есть 5 переменных  $Y_1 \dots Y_5$ , каждая их комбинация дает 2 допустимых пары  $(X_1;X_2)$ , 2 пары  $(X_3;X_4)$ , 2 пары  $(X_5;X_6)$ , 2 пары  $(X_7;X_8)$  и 2 пары  $(X_9;X_{10})$ , то есть всего  $2^5 = 32$  комбинации исходных переменных
- 21) таким образом, общее количество решений равно  $2 \cdot 32 = 64$
- 22) ответ: 64 решения

**Решение (табличный метод):**

- 1) так же, как и в предыдущем варианте, с помощью замены переменных сведем систему к виду:

$$\begin{aligned} (Y_1 \equiv Y_2) &= 1 \\ (Y_2 \equiv Y_3) &= 1 \\ (Y_3 \equiv Y_4) &= 1 \\ (Y_4 \equiv Y_5) &= 1 \end{aligned}$$

- 2) рассмотрим все решения первого уравнения  $(Y_1 \equiv Y_2) = 1$  по таблице истинности:

$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$	$Y_2$	$Y_1$
1	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

- 3) строчки, выделенные красным фоном, не удовлетворяют условию, поэтому дальше их рассматривать не будем  
 4) теперь подключаем третью переменную и второе уравнение:

$Y_3$	$Y_2$	$Y_1$
?	0	0
?	1	1

- 5) при каких значениях переменной  $X_3$  будет верно условие  $(Y_2 \equiv Y_3) = 1$ ? Очевидно, что на это уже не влияет  $Y_1$  (этот столбец выделен зеленым цветом). Сразу получаем два решения:

$Y_3$	$Y_2$	$Y_1$
0	0	0
1	1	1

- 6) как видно из таблицы, каждая строчка предыдущей таблицы дает одно решение при подключении очередного уравнения, поэтому для любого количества переменных система имеет 2 решения – все нули и все единицы  
 7) так же, как и в предыдущем способе, переходим к исходным переменным и находим общее количество решений:  $2 \cdot 32 = 64$   
 8) ответ: 64 решения

**Решение (метод отображений<sup>6</sup>, решение А.Н. Носкина):**

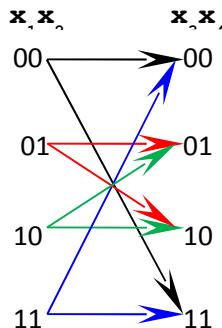
- 1) построим таблицу, в которой переберем все варианты  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , поскольку в первом логическом уравнении четыре переменных, то таблица будет иметь 16 строк ( $16=2^4$ ); уберем из таблицы (желтая заливка) такие значения  $x_4$ , при которых первое уравнение не имеет решения.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	0	0
		1	1
		0	0
		1	1
	1	0	0
		1	1
		0	0
		1	1
1	0	0	0
1		1	0
1		0	1
1		1	1

<sup>6</sup> Метод отображений предложен Ел.А. Мирончик и Ек.А. Мирончик (<http://kpolyakov.spb.ru/download/b15mirn.zip>).

		1	0
			1

- 2) анализируя таблицу, строим правило отображения пар переменных  
 (например, паре  $x_1x_2 = 00$  соответствуют пары  $x_3x_4 = 00$  и  $11$ , и, наоборот, для пары  $x_1x_2 = 00$  нет связей  $x_3x_4 = 01$  и  $10$ ).



- 3) заполняем таблицу, вычисляя количество пар переменных, при котором система имеет решение.

	$x_1x_2$	$x_3x_4$	$x_5x_6$	$x_7x_8$	$x_9x_{10}$
00	1	2	4	8	16
01	1	2	4	8	16
10	1	2	4	8	16
11	1	2	4	8	16

- 4) таким образом, ответ:  $16 + 16 + 16 + 16 = 64$  решения.

### Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{aligned}
 (X_2 \equiv X_1) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge X_3) &= 1 \\
 (X_3 \equiv X_1) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge X_4) &= 1 \\
 &\dots \\
 (X_9 \equiv X_1) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge X_{10}) &= 1 \\
 (X_{10} \equiv X_1) &= 0
 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

### Решение (табличный метод):

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно  $2^{10} = 1024$ , поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу  
 2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$(X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 = 1$$

$$(X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X}_3 \cdot \overline{X}_4 = 1$$

...

$$(X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X}_9 \cdot \overline{X}_{10} = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

- 3) заметим, что по свойству операции эквивалентности  $X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 = (X_2 \equiv X_3)$ , поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

- 4) первое уравнение выполняется, когда есть  $X_2$  равно  $X_1$  или  $X_3$   
 5) по таблице истинности находим 6 вариантов (для удобства мы будем записывать сначала столбец для  $X_1$ , а потом для всех остальных в обратном порядке):

$X_1$	$X_3$	$X_2$
0	0	0
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	1

обратите внимание, что в каждой строчке в первых двух столбцах должно быть по крайней мере одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым)

- 6) добавим еще одно уравнение и еще одну переменную  $X_4$ :

$X_1$	$X_4$	$X_3$	$X_2$
0	?	0	0
0	?	1	0
0	?	1	1
1	?	0	0
1	?	0	1
1	?	1	1

- 7) чтобы «подключить» второе уравнение, нужно использовать то же самое правило: каждой строчке в первых двух столбцах должно быть, по крайней мере, одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым); это значит, что в первой и последней строчках (где  $X_1 = X_3$ ) значение  $X_4$  может быть любое (0 или 1), а в остальных строчках – только строго определенное:

$X_1$	$X_4$	$X_3$	$X_2$
0	0	0	0
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- 8) таким образом, количество решений при подключении очередного уравнения к системе возрастает на 2!  
 9) подключили  $X_5$  – получили 10 решений,  $X_6$  – получили 12 решений,  $X_7$  – получили 14 решений,  $X_8$  – получили 16 решений,  $X_9$  – получили 18 решений,  $X_{10}$  – получили 20 решений.  
 10) остается одно последнее уравнение  $(X_{10} \equiv X_1) = 0$ , из которого следует, что  $X_{10}$  не равен  $X_1$   
 11) из таблицы следует, что только в первой и последней строчках значения первой и последней переменных совпадают, то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2  
 12) таким образом, получается  $20 - 2 = 18$  решений  
 13) ответ: 18 решений

**Еще пример задания:**

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

**Решение (табличный метод):**

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно  $2^{10} = 1024$ , поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X}_8 \cdot \overline{X}_9 + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

- 3) заметим, что по свойству операции эквивалентности  $X_1 \cdot X_2 + \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 = (X_1 \equiv X_2)$ , поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

- 4) сделать замену переменных так, чтобы новые переменные были независимы друг от друга, здесь довольно затруднительно, поэтому будем решать уравнения последовательно табличным методом
- 5) рассмотрим все возможные комбинации первых двух переменных  $X_1$  и  $X_2$ , и сразу попытаемся для каждой из них подобрать значения третьей так, чтобы выполнялось первое уравнение  $(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$ :

$X_3$	$X_2$	$X_1$
?	0	0
?	0	1
?	1	0
?	1	1

- 6) очевидно, что в первой и последней строчках таблицы, где  $X_1 = X_2$ , значения  $X_3$  могут быть любыми, то есть каждая из этих строчек дает два решения; в то же время во второй и третьей строках, где  $X_1 \neq X_2$ , мы сразу получаем, что для выполнения первого равнения необходимо  $X_1 = X_3$ , то есть, эти две строчки дают по одному решению:

$X_3$	$X_2$	$X_1$
0	0	0
1	0	0
1	0	1
0	1	0
0	1	1

1	1	1
---	---	---

- 7) заметим, что количество решений для каждой строчки исходной таблицы (с двумя переменными) определялось лишь тем, равны значения в двух последних столбцах ( $X_2$  и  $X_1$ ) или не равны;
- 8) также заметим, что в новой таблице в самой верхней и самой нижней строках значения  $X_3$  и  $X_2$  равны, а в остальных не равны (их 4 штуки); поэтому на следующем шаге (при подключении четвертой переменной и третьего уравнения) верхняя и нижняя строки дадут 2 варианта с равными  $X_4$  и  $X_3$ , и  $2 + 4 = 6$  вариантов, где  $X_4$  и  $X_3$  не равны
- 9) в общем виде: если на шаге  $i$  в таблице решений есть
- $n_i$  строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы равны, и ...
  - $m_i$  строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы не равны,
- то на следующем шаге будет столько же ( $n_i$ ) строк с равными значениями в двух самых последних столбцах и  $n_i + m_i$  строк с неравными значениями
- 10) эту последовательность можно записать в виде таблицы ( $i$  – число задействованных переменных):

$i$	$X_i = X_{i-1}$	$X_i \neq X_{i-1}$	всего решений
3	2	4	6
4	2	$2+4=6$	8
5	2	$2+6=8$	10
6	2	$2+8=10$	12
7	2	$2+10=12$	14
8	2	$2+12=14$	16
9	2	$2+14=16$	18
10	2	$2+16=18$	20

- 11) таким образом, для системы с 10 переменными общее количество решений равно  $2 + 18 = 20$   
 12) ответ: **20 решений**

### Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

#### Решение (табличный метод):

- 1) количество комбинаций 10 логических переменных равно  $2^{10} = 1024$ , поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
- 2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 + X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 = 1$$

$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X}_2 \cdot \overline{X}_3 + X_3 \cdot X_4 + \overline{X}_3 \cdot \overline{X}_4 = 1$$

...

$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X}_8 \cdot \overline{X}_9 + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X}_9 \cdot \overline{X}_{10} = 1$$

- 3) заметим, что по свойству операции эквивалентности  $X_1 \cdot X_2 + \overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 = (X_1 \equiv X_2)$ , поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

- 4) сделать замену переменных так, чтобы новые переменные был независимы друг от друга, здесь довольно затруднительно, поэтому будем решать уравнения последовательно табличным методом
- 5) рассмотрим все возможные комбинации первых двух переменных  $X_1$  и  $X_2$ , и сразу попытаемся для каждой из них подобрать значения третьей так, чтобы выполнялось первое уравнение  $(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$ :

$X_3$	$X_2$	$X_1$
?	0	0
?	0	1
?	1	0
?	1	1

- 6) очевидно, что в первой и последней строчках таблицы, где  $X_1 = X_2$ , значения  $X_3$  могут быть любыми, то есть каждая из этих строчек дает два решения; в то же время во второй и третьей строках, где  $X_1 \neq X_2$ , мы сразу получаем, что для выполнения первого равнения необходимо  $X_2 = X_3$ , то есть, эти две строчки дают по одному решению:

$X_3$	$X_2$	$X_1$
0	0	0
1	0	0
0	0	1
1	1	0
0	1	1
1	1	1

- 7) заметим, что количество решений для каждой строчки исходной таблицы (с двумя переменными) определялось лишь тем, равны значения в двух последних столбцах ( $X_2$  и  $X_1$ ) или не равны;
- 8) переставим строки так, чтобы сверху стояли те строки, в которых  $X_2 = X_3$ :

$X_3$	$X_2$	$X_1$
0	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1
1	0	0
0	1	1

- 9) также заметим, что в новой таблице в четырех строках значения  $X_2 = X_3$ , а в остальных 2-х эти переменные не равны;
- 10) поэтому на следующем шаге (при подключении четвертой переменной и третьего уравнения) 4 первые строки дадут по 2 варианта (всего  $4 \cdot 2 = 8$ ) решений, из них 4 штуки с равными  $X_4$  и  $X_3$ , и 4 варианта, где  $X_4$  и  $X_3$  не равны
- 11) две нижние строки, где  $X_2 \neq X_3$ , дадут 2 варианта, где  $X_4$  и  $X_3$  равны
- 12) в общем виде: если на шаге  $i$  в таблице решений есть
- $n_i$  строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы равны, и ...
  - $m_i$  строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы не равны,
- то на следующем шаге будет  $(n_i + m_i)$  строк с равными значениями в двух самых последних столбцах и  $n_i$  строк с неравными значениями

- 13) эту последовательность можно записать в виде таблицы ( $i$  – число задействованных переменных):

$i$	$X_i = X_{i-1}$	$X_i \neq X_{i-1}$	всего решений
3	4	2	6
4	4+2=6	4	10
5	6+4=10	6	16
6	10+6=16	10	26
7	16+10=26	16	42
8	26+16=42	26	68
9	42+26=68	42	110
10	68+42=110	68	178

- 14) таким образом, для системы с 10 переменными общее количество решений равно

$$110 + 68 = 178$$

- 15) ответ: 178 решений

**Решение (использование дерева для представления решения):**

- 1) идея представления множества решений в виде дерева использовалась, например, в решениях **О.А. Тузовой** (Санкт-Петербург, школа № 550) и **М.В. Демидовой** (г. Пермь, гимназия №17); как верно отметила О.А. Тузова, предложенный выше табличный метод по сути представляет собой компактную запись дерева
- 2) так же, как и в предыдущем варианте решения, перейдем к равносильной системе уравнений

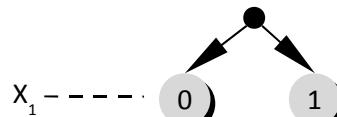
$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$

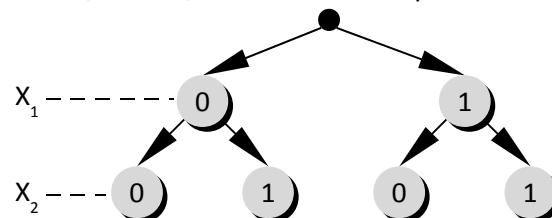
...

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

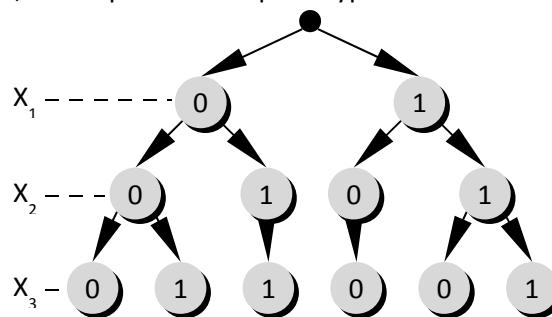
- 3) все переменные логические, в принятых обозначениях каждая из них может быть равна 1 или 0; для  $X_1$  получаем два варианта, которые можно представить в виде



- 4) при этом  $X_2$  может быть любым, то есть, имеем всего 4 варианта



- 5) теперь рассматриваем переменную  $X_3$ ; если  $X_1 = X_2$ , то уравнение  $(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$  выполняется при любом  $X_3$ ; если  $X_1 \neq X_2$ , то это уравнение сразу дает  $X_3 = X_2$ ; дерево получается уже неполным, число решений первого уравнения – 6:



- 6) рассуждая аналогично, находим, что на следующем шаге (подключение переменной  $X_4$  и второго уравнения) получается 10 решений, затем – 16 и т.д.; в результате получается

удвоенная последовательность Фибоначчи (2, 4, 6, 10, 16, 26, ...), в которой каждый следующий элемент равен сумме двух предыдущих:

i	число решений
3	6
4	10
5	16
6	26
7	42
8	68
9	110
10	178

- 7) в некоторых вариантах такой подход рассматривался совместно с методом декомпозиции: сначала предполагаем, что  $X_1 = 0$  и находим все решения для этого варианта; затем находим все решения при  $X_1 = 1$ ; после этого общее количество решений вычисляется как сумма полученных двух чисел  
 8) ответ: 178 решений

### Ещё пример задания:

Каково наибольшее целое число  $X$ , при котором истинно высказывание

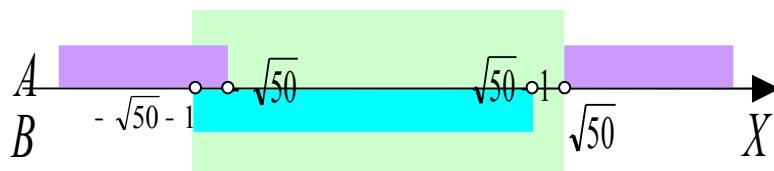
$$(50 < x \cdot x) \rightarrow (50 > (x+1) \cdot (x+1))$$

#### Решение (вариант 1):

- 1) это операция импликации между двумя отношениями  $A = (50 < X^2)$  и  $B = (50 > (X+1)^2)$   
 2) попробуем сначала решить неравенства

$$A = 50 < X^2 \Rightarrow |X| > \sqrt{50}, \quad B = 50 > (X+1)^2 \Rightarrow |X+1| < \sqrt{50}$$

- 3) обозначим эти области на оси  $X$ :



на рисунке фиолетовые зоны обозначают область, где истинно выражение  $A$ , голубая зона – это область, где истинно  $B$

- 4) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 5) согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где  $A = 1$  и  $B = 0$ ;  
 область истинности выделена зеленым цветом  
 6) поэтому наибольшее целое число, удовлетворяющее условию – это первое целое число, меньшее  $\sqrt{50} \approx 7,1$ , то есть, 7  
 7) таким образом, верный ответ – 7.

**Возможные проблемы:**

- в этом примере потребовалось применить знания не только (и не столько) из курса информатики, но и умение решать неравенства
- нужно не забыть правила извлечения квадратного корня из обеих частей неравенства (операции с модулями)

**Решение (вариант 2, преобразование выражения):**

- 1) сначала можно преобразовать импликацию, выразив ее через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

- 2) это значит, что выражение истинно там, где  $A = 0$  или  $B = 1$   
 3) дальнейшие действия точно такие же, как и в варианте 1.

**Возможные проблемы:**

- нужно помнить формулу для преобразования импликации

**Решение (вариант 3, математический):**

- 1) это операция импликации между двумя отношениями  $A = (50 < X^2)$  и  $B = (50 > (X+1)^2)$   
 2) пусть  $A = (X^2 > 50)$  – истинно, тогда, с учетом того, что  $X^2 > 0$ , находим, что  $B = ((X+1)^2 < 50)$  – ложно, таким образом, импликация  $A \rightarrow B$  ложна  
 3) следовательно, импликация может быть истинной только при  $X^2 \leq 50$ ; поскольку в этом случае высказывание  $A$  ложно, то  $A \rightarrow B = 0 \rightarrow B = 1$  при любом  $B$   
 4) максимальное целое значение  $X$ , при котором  $X^2 \leq 50$ , равно 7  
 5) таким образом, верный ответ – 7.

**Еще пример задания:**

Каково наибольшее целое число  $X$ , при котором истинно высказывание

$$(10 < x \cdot (x+1)) \rightarrow (10 > (x+1) \cdot (x+2))$$

**Решение (в целых числах):**

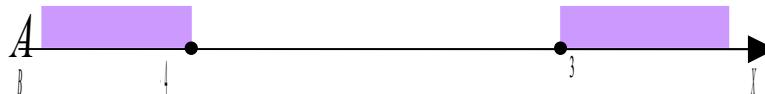
- 1) это операция импликации между двумя отношениями:

$$A_0 = (10 < X \cdot (X+1)) \text{ и } B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$$

- 2) конечно, здесь можно применить тот же способ, что и в предыдущем примере, однако при этом понадобится решать квадратные уравнения (*не хочется...*)  
 3) заметим, что по условию нас интересуют **только целые числа**, поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (как понятно из предыдущего примера, точные значения корней нас совершенно не интересуют!)  
 4) рассмотрим неравенство  $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$ : очевидно, что  $X$  может быть как положительным, так и отрицательным числом;  
 5) легко проверить, что в области  $X \geq 0$  высказывание  $A_0$  истинно при всех целых  $X \geq 3$ , а в области  $X \leq 0$  – при всех целых  $X \leq -4$  (чтобы не запутаться, удобнее использовать **нестрогие неравенства**,  $\leq$  и  $\geq$ , вместо  $<$  и  $>$ )  
 6) поэтому для целых  $X$  можно заменить  $A_0$  на равносильное выражение

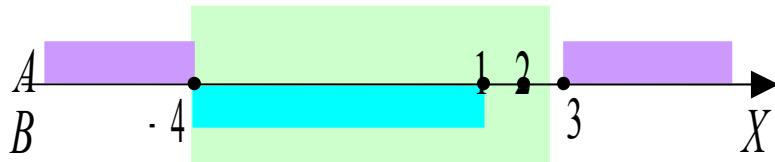
$$A = (X \leq -4) + (X \geq 3)$$

- 7) область истинности выражения  $A$  – объединение двух бесконечных интервалов:



- 8) теперь рассмотрим второе неравенство  $B_0 = (10 > (X + 1) \cdot (X + 2))$ : очевидно, что  $X$  так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
- 9) в области  $X \geq 0$  высказывание  $B_0$  истинно при всех целых  $X \leq 1$ , а в области  $X \leq 0$  – при всех целых  $X \geq -4$ , поэтому для целых  $X$  можно заменить  $B_0$  на равносильное выражение
- $$B = (-4 \leq X \leq 0) + (0 \leq X \leq 1) = (-4 \leq X \leq 1)$$

10) область истинности выражения  $B$  – закрытый интервал, обозначенный голубой полоской



11) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 12) согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где  $A = 1$  и  $B = 0$ ;  
область истинности выделена на рисунке зеленым цветом;
- 13) обратите внимание, что значение  $X = 3$  уже не входит в зеленую зону, потому что там  $A = 1$  и  $B = 0$ , то есть импликация дает 0
- 14) по схеме видно, что максимальное целое число в зеленой области – 2
- 15) таким образом, верный ответ – 2.

#### Возможные проблемы:

- нужно помнить, что мы рассматриваем значения выражения только для целых  $X$ , при этом появляются свои особенности: может появиться желание продлить зеленую область до точки  $X = 3$ , что приведет к неверному ответу, потому что там уже  $A = 1$  и  $A \rightarrow B = 1 \rightarrow 0 = 0$

#### Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K \vee L) \rightarrow (L \wedge M \wedge N)) = 0$$

где  $K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

#### Решение (вариант 1, разделение на части):

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$((K + L) \rightarrow (L \cdot M \cdot N)) = 0$$

- 2) из таблицы истинности операции «импликация» (см. первую задачу) следует, что это равенство верно тогда и только тогда, когда одновременно

$$K + L = 1 \quad \text{и} \quad L \cdot M \cdot N = 0$$

- 3) из первого уравнения следует, что хотя бы одна из переменных,  $K$  или  $L$ , равна 1 (или обе вместе); поэтому рассмотрим три случая

- 4) если  $K = 1$  и  $L = 0$ , то второе равенство выполняется при любых  $M$  и  $N$ ; поскольку существует 4 комбинации двух логических переменных (00, 01, 10 и 11), имеем 4 разных решения

- 5) если  $K = 1$  и  $L = 1$ , то второе равенство выполняется при  $M \cdot N = 0$ ; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще **3** решения
- 6) если  $K = 0$ , то обязательно  $L = 1$  (из первого уравнения); при этом второе равенство выполняется при  $M \cdot N = 0$ ; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще **3** решения
- 7) таким образом, всего получаем  $4 + 3 + 3 = \textcolor{yellow}{10}$  решений.

**Совет:**

- лучше начинать с того уравнения, где меньше переменных

**Возможные проблемы:**

- есть риск потерять какие-то решения при переборе вариантов

**Решение (вариант 2, через таблицы истинности):**

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$((K + L) \rightarrow (L \cdot M \cdot N)) = 0$$

- 2) построим таблицу для логического выражения

$$X = ((K + L) \rightarrow (L \cdot M \cdot N))$$

и подсчитаем, сколько в ней нулей, это и будет ответ

- 3) наше выражение зависит от четырех переменных, поэтому в таблице будет  $2^4 = 16$  строчек (16 возможных комбинаций четырех логических значений)
- 4) подставляем различные комбинации в формулу для  $X$ ; несмотря на большое количество вариантов, таблица строится легко: достаточно вспомнить, что выражение  $K + L$  ложно только при  $K = L = 0$ , а выражение  $L \cdot M \cdot N$  истинно только при  $L = M = N = 1$ .

$K$	$L$	$M$	$N$	$K+L$	$L \cdot M \cdot N$	$X$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

- 5) в последнем столбце 10 нулей; это значит, что есть 10 разных комбинаций, при которых выражение  $X$  равно нулю, то есть исходное уравнение имеет 10 решений
- 6) таким образом, всего **10** решений.

**Возможные проблемы:**

- нужно строить таблицу истинности функции от 4 переменных, это трудоемко, легко ошибиться

**Еще пример задания:**

Укажите значения переменных  $K, L, M, N$ , при которых логическое выражение

$$(\neg(M \vee L) \wedge K) \rightarrow (\neg K \wedge \neg M \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из 4 символов: значений переменных  $K, L, M$  и  $N$  (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что  $K=1, L=1, M=0, N=1$ .

**Решение (вариант 1, анализ исходного выражения):**

- 1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций (условие «выражение ложно» означает, что оно равно логическому нулю):

$$((\overline{M + L}) \cdot K) \rightarrow (\overline{K} \cdot \overline{M} + N) = 0$$

- 2) из формулировки условия следует, что выражение должно быть ложно только для одного набора переменных  
 3) из таблицы истинности операции «импликация» (см. первую задачу) следует, что это выражение ложно тогда и только тогда, когда одновременно

$$(\overline{M + L}) \cdot K = 1 \quad \text{и} \quad \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$

- 4) первое равенство (логическое произведение равно 1) выполняется тогда и только тогда, когда  $K = 1$  и  $\overline{M + L} = 1$ ; отсюда следует  $M + L = 0$  (логическая сумма равна нулю), что может быть только при  $M = L = 0$ ; таким образом, три переменных мы уже определили  
 5) из второго условия,  $\overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$ , при  $K = 1$  и  $M = 0$  получаем  $N = 0$   
 6) таким образом, правильный ответ – 1000.

**Возможные проблемы:**

- переменные однозначно определяются только для ситуаций «сумма = 0» (все равны 0) и «произведение = 1» (все равны 1), в остальных случаях нужно рассматривать разные варианты
- не всегда выражение сразу распадается на 2 (или более) отдельных уравнения, каждое из которых однозначно определяет некоторые переменные

**Решение (вариант 2, упрощение выражения):**

- 1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$((\overline{M + L}) \cdot K) \rightarrow (\overline{K} \cdot \overline{M} + N) = 0$$

- 2) заменим импликацию по формуле  $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ :

$$(\overline{(\overline{M + L}) \cdot K}) + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$

- 3) раскроем инверсию сложного выражения по формуле де Моргана  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ :

$$M + L + \overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$

- 4) упростим выражение  $\overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} = \overline{K}(1 + \overline{M}) = \overline{K}$ :

$$M + L + \overline{K} + N = 0$$

- 5) мы получили уравнение вида «сумма = 0», в нем все слагаемые должны быть равны нулю  
 6) поэтому сразу находим  $M = L = N = 0, K = 1$   
 7) таким образом, правильный ответ – 1000.

**Замечание:**

- этот способ работает всегда и дает более общее решение; в частности, можно легко обнаружить, что уравнение имеет несколько решений (тогда оно не сводится к форме «сумма = 0» или «произведение = 1»)

**Возможные проблемы:**

- нужно помнить правила преобразования логических выражений и хорошо владеть этой техникой

**Еще пример задания:**

*Составьте таблицу истинности для логической функции*

$$X = (A \leftrightarrow B) \vee \neg(A \rightarrow (B \vee C))$$

*в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 27, столбец значений аргумента B – числа 77, столбец значений аргумента C – числа 120. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.*

**Решение (вариант 1):**

- запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$X = (A \leftrightarrow B) + \overline{(A \rightarrow (B + C))}$$

- это выражение с тремя переменными, поэтому в таблице истинности будет  $2^3=8$  строчек; следовательно, двоичная запись чисел, по которым строятся столбцы таблицы A, B и C, должна состоять из 8 цифр
- переведем числа 27, 77 и 120 в двоичную систему, сразу дополняя запись до 8 знаков нулями в начале чисел  
 $27 = 00011011_2 \quad 77 = 01001101_2 \quad 120 = 01111000_2$
- теперь можно составить таблицу истинности (см. рисунок справа), в которой строки переставлены в сравнении с традиционным порядком<sup>7</sup>; зеленым фоном выделена двоичная записи числа 27 (биты записываются сверху вниз), синим – запись числа 77 и розовым – запись числа 120:
- вряд ли вы сможете сразу написать значения функции X для каждой комбинации, поэтому удобно добавить в таблицу дополнительные столбцы для расчета промежуточных результатов (см. таблицу ниже)
- заполняем столбцы таблицы:

A	B	C	X
0	0	0	
0	1	1	
0	0	1	
1	0	1	
1	1	1	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	0	

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B + C$	$A \rightarrow (B + C)$	$\overline{A \rightarrow (B + C)}$	X
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1

значение  $A \leftrightarrow B$  равно 1 только в тех строчках, где  $A = B$

значение  $B + C$  равно 1 только в тех строчках, где  $B = 1$  или  $C = 1$

значение  $A \rightarrow (B + C)$  равно 0 только в тех строчках, где  $A = 1$  и  $B + C = 0$

значение  $\overline{A \rightarrow (B + C)}$  – это инверсия предыдущего столбца (0 заменяется на 1, а 1 – на 0)

результат X (последний столбец) – это логическая сумма двух столбцов, выделенных фиолетовым фоном

- чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз:  $X = 10101011_2$

<sup>7</sup> Проверьте, что обычно (когда комбинации располагаются по возрастанию соответствующих двоичных чисел), столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа  $15 = 1111_2$ , столбец значений аргумента B – числа  $51 = 110011_2$ , столбец значений аргумента C – числа  $85 = 10101010_2$ .

- 8) переводим это число в десятичную систему:  $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$   
 9) таким образом, правильный ответ – 171.

**Возможные проблемы:**

- нужно помнить таблицы истинности логических операций
- легко запутаться в многочисленных столбцах с однородными данными (нулями и единицами)

**Решение (вариант 2, преобразование логической функции):**

- 1) выполним пп. 1-5 так же, как и в предыдущем способе  
 2) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$X = (A \leftrightarrow B) + \overline{(A \rightarrow (B + C))}$$

- 3) раскроем импликацию через операции И, ИЛИ и НЕ ( $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ ):

$$A \rightarrow (B + C) = \overline{A} + B + C$$

- 4) раскроем инверсию для выражения  $A \rightarrow (B + C) = \overline{A} + B + C$  по формуле де Моргана:

$$\overline{A \rightarrow (B + C)} = \overline{\overline{A} + B + C} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

- 5) таким образом, выражение приобретает вид  $X = (A \leftrightarrow B) + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

- 6) отсюда сразу видно, что  $X = 1$  только тогда, когда  $A = B$  или ( $A = 1$  и  $B = C = 0$ ):

A	B	C	X	Примечание
0	0	0	1	$A = B$
0	1	1	0	
0	0	1	1	$A = B$
1	0	1	0	
1	1	1	1	$A = B$
0	1	0	0	
1	0	0	1	$A = 1, B = C = 0$
1	1	0	1	$A = B$

- 7) чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз:  $X = 10101011_2$

- 8) переводим это число в десятичную систему:  $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$

- 9) таким образом, правильный ответ – 171.

**Возможные проблемы:**

- нужно помнить правила преобразования логических выражений и хорошо владеть этой техникой

**Еще пример задания:**

$A, B$  и  $C$  – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((A > B) \rightarrow (B > C)) \wedge ((B > A) \rightarrow (C > B))$$

Чему равно  $B$ , если  $A = 45$  и  $C = 43$ ?

**Решение (вариант 1):**

- 1) обратим внимание, что это сложное высказывание состоит из трех простых

$$\neg(A = B)$$

$$(A > B) \rightarrow (B > C)$$

$$(B > A) \rightarrow (C > B)$$

- 2) эти простые высказывания связаны операцией  $\wedge$  (И, конъюнкция), то есть, они должны выполняться одновременно

- 3) из  $\neg(A = B) = 1$  сразу следует, что  $A \neq B$
- 4) предположим, что  $A > B$ , тогда из второго условия получаем  $1 \rightarrow (B > C) = 1$ ; это выражение может быть истинно тогда и только тогда, когда  $B > C = 1$
- 5) поэтому имеем  $A > B > C$ , этому условию соответствует только число 44
- 6) на всякий случай проверим и вариант  $A < B$ , тогда из второго условия получаем  $0 \rightarrow (B > C) = 1$ ; это выражение истинно при любом  $B$ ; теперь смотрим третье условие: получаем  $1 \rightarrow (C > B) = 1$ ; это выражение может быть истинно тогда и только тогда, когда  $C > B$ , и тут мы получили противоречие, потому что нет такого числа  $B$ , для которого  $C > B > A$
- 7) таким образом, правильный ответ – 44.

**Решение (вариант 2, интуитивный):**

- 1) заметим, что между  $A$  и  $C$  расположено единственное число 44, поэтому можно предполагать, что именно это и есть ответ
  - 2) проверим догадку, подставив в заданное выражение  $A = 45, B = 44$  и  $C = 43$
- $$\neg(45 = 44) \wedge ((45 > 44) \rightarrow (44 > 43)) \wedge ((44 > 45) \rightarrow (43 > 44))$$
- 3) заменим истинные условия на 1, а ложные – на 0:

$$\neg(0) \wedge (1 \rightarrow 1) \wedge (0 \rightarrow 0)$$

- 4) вычисляем по таблице результаты операций  $\neg$  (НЕ, отрицание) и  $\rightarrow$  (импликация):

$$1 \wedge 1 \wedge 1$$

- 5) остается применить операцию  $\wedge$  (И, конъюнкция) – получаем 1, то есть, выражение истинно, что нам и нужно
- 6) таким образом, правильный ответ – 44.

#### Возможные проблемы:

- не всегда удается сразу догадаться

### Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 0$$

где  $K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

**Решение (поиск неподходящих комбинаций):**

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
- $$K \cdot L \cdot M + \bar{L} \cdot \bar{M} \cdot N = 0$$
- 2) здесь используется сложение двух логических произведений, которое равно 1 если одно из двух слагаемых истинно
  - 3) поскольку произведения включают много переменных, можно предположить, что они равны 1 в небольшом числе случаев, поэтому мы попытаемся найти количество решений «обратного» уравнения

$$K \cdot L \cdot M + \bar{L} \cdot \bar{M} \cdot N = 1 \quad (*)$$

а потом вычесть это число из общего количества комбинаций значений переменных  $K, L, M, N$  (для четырех логических переменных, принимающих два значения (0 или 1), существует  $2^4 = 16$  различных комбинаций)

- 4) уравнение  $K \cdot L \cdot M = 1$  имеет два решения: требуется, чтобы  $K = L = M = 1$ , а  $N$  может принимать любые (логические) значения, то есть, 0 или 1; эти два решения – 1110 и 1111
- 5) уравнение  $\bar{L} \cdot \bar{M} \cdot N = 1$  также имеет два решения: требуется, чтобы  $L = M = 0$ ,  $N = 1$ , а  $K$  может быть равно 0 или 1; эти два решения – 0001 и 1001
- 6) среди полученных четырех решений нет одинаковых, поэтому уравнение (\*) имеет 4 решения
- 7) это значит, что исходное уравнение истинно для всех остальных  $16-4=12$  комбинаций переменных  $K, L, M, N$
- 8) таким образом, правильный ответ – 12.

**Возможные проблемы:**

- не всегда удается догадаться, что неверных комбинаций меньше
- нужно проверять, что среди найденных решений нет одинаковых

**Еще пример задания:**

Каково наибольшее целое положительное число  $x$ , при котором истинно высказывание:

$$(x \cdot (x + 3) > x \cdot x + 7) \rightarrow (x \cdot (x + 2) \leq x \cdot x + 11)$$

**Решение (преобразование выражений):**

- 1) несмотря на страшный вид, эта задача решается очень просто; сначала раскроем скобки в обеих частях импликации:
- $$(x \cdot x + 3 \cdot x > x \cdot x + 7) \rightarrow (x \cdot x + 2 \cdot x \leq x \cdot x + 11)$$
- 2) теперь в каждой части вычтем  $x \cdot x$  из обеих частей неравенства:
- $$(3 \cdot x > 7) \rightarrow (2 \cdot x \leq 11)$$
- 3) в целых числах это равносильно:
- $$(x \geq 3) \rightarrow (x \leq 5)$$
- 4) вспомним, как раскрывается импликация через операции ИЛИ и НЕ:  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$
- 5) учитывая, что  $A = X \geq 3$ , имеем  $\bar{A} = X < 3$ , следовательно
- $$(x < 3) \text{ или } (x \leq 5)$$
- 6) это равносильно высказыванию  $(x \leq 5)$
- 7) таким образом, ответ – 5.

**Еще пример задания:**

Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N)) \vee \neg((M \wedge N) \rightarrow (\neg J \vee K)) \vee (M \wedge N \wedge K \wedge L) = 0$$

где  $J, K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $J, K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

**Решение (вариант 1, упрощение выражения):**

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
- $$\overline{(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N} + \overline{M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K)} + M \cdot N \cdot K \cdot L = 0$$
- 2) логическая сумма трех слагаемых равна нулю, поэтому каждое из них должно быть равно нулю
- 3) обозначим сумму двух первых слагаемых через  $S_{12}$  и попытаемся «свернуть» ее; для этого представим импликацию в виде  $J \rightarrow K = \bar{J} + K$ , тогда

$$S_{12} = \overline{(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N} + \overline{M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K)} = \overline{(\bar{J} + K) \rightarrow M \cdot N} + \overline{M \cdot N \rightarrow (\bar{J} + K)}$$

- 4) выполним замены  $A = \bar{J} + K$  и  $B = M \cdot N$ , тогда

$$S_{12} = \overline{(A \rightarrow B)} + \overline{(B \rightarrow A)}$$

- 5) раскроем импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» ( $A \rightarrow B = \overline{A} + B$ ):

$$S_{12} = \overline{\overline{A} + B} + \overline{\overline{B} + A}$$

- 6) теперь применим формулу де Моргана  $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ :

$$S_{12} = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A}$$

- 7) заметим, что в третьем слагаемом  $M \cdot N \cdot K \cdot L$  тоже есть сомножитель  $B = M \cdot N$ , поэтому уравнение можно переписать в виде

$$A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A} + B \cdot K \cdot L = 0$$

или

$$A \cdot \overline{B} + B \cdot (\overline{A} + K \cdot L) = 0$$

- 8) это равенство выполняется, тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю;

- 9) учитывая, что в первом слагаемом есть сомножитель  $\overline{B}$ , а во втором  $-B$ , это может быть в двух случаях:

1)  $B = 0, A = 0, L$  – любое (0 или 1)

2)  $B = 1, \overline{A} + K \cdot L = 0$

- 10) рассмотрим случай «а»: условию  $B = M \cdot N = 0$  удовлетворяют 3 пары (M,N): (0,0), (0,1) и (1,0); из условия  $A = \bar{J} + K = 0$  сразу получаем, что  $J = 1$  и  $K = 0$ ; учитывая, что  $L$  – любое (0 или 1), в случае «а» получаем 6 разных решений;

- 11) в случае «б» условие  $B = M \cdot N = 1$  сразу дает  $M = N = 1$ ; преобразуем второе условие с помощью формулы де Моргана:

$$\overline{A} + K \cdot L = \overline{\overline{J} + K} + K \cdot L = J \cdot \overline{K} + K \cdot L = 0$$

это значит, что при  $K = 0$  получаем  $J = 0$  и  $L$  – любое (2 решения), а при  $K = 1$  имеем  $L = 0$  и  $J$  – любое (еще 2 решения)

- 12) проверяем, что все решения разные, поэтому всего найдено  $6 + 2 + 2 = 10$  решений

- 13) ответ – **10**.

#### Решение (вариант 2, использование свойств импликации):

- 1) выполнив шаги 1-4 из первого варианта решения, получим

$$S_{12} = \overline{(A \rightarrow B)} + \overline{(B \rightarrow A)}$$

при заменах  $A = \bar{J} + K$  и  $B = M \cdot N$

- 2) поскольку нужно, чтобы  $S_{12} = 0$ , оба слагаемых равны нулю, то есть, обе импликации

истинны:  $A \rightarrow B = 1$  и  $B \rightarrow A = 1$

- 3) отсюда по таблице истинности операции «импликация» находим, что это может быть в двух случаях:

1)  $B = 0, A = 0, L$  – любое (0 или 1)

2)  $B = 1, A = 1, K \cdot L = 0$

- 4) рассмотрим случай «а»: условию  $B = M \cdot N = 0$  удовлетворяют 3 пары (M,N): (0,0), (0,1) и (1,0); из условия  $A = \bar{J} + K = 0$  сразу получаем, что  $J = 1$  и  $K = 0$ ; учитывая, что  $L$  – любое (0 или 1), в случае «а» получаем 6 разных решений;

- 5) в случае «б» условие  $B = M \cdot N = 1$  сразу дает  $M = N = 1$ ; преобразуем второе условие с помощью формулы де Моргана и перепишем третье:

$$A = \bar{J} + K = 1, K \cdot L = 0$$

это значит, что при  $K = 0$  получаем  $J = 0$  и  $L$  – любое (2 решения), а при  $K = 1$  имеем  $L = 0$  и  $J$  – любое (еще 2 решения)

- 6) проверяем, что все решения разные, поэтому всего найдено  $6 + 2 + 2 = 10$  решений  
 7) ответ – 10.

**Возможные проблемы:**

- это уравнение требует достаточно сложных преобразований; если вы не уверены в своих теоретических знаниях, лучше составить таблицу истинности (для 5 переменных в ней будет 32 строки) и аккуратно подставить все возможные комбинации переменных
- не всегда удается найти («увидеть») закономерности, позволяющие упростить выражение
- нужно проверять, чтобы среди найденных решений не было одинаковых

**Еще пример задания:**

*Сколько различных решений имеет уравнение*

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((M \wedge N \wedge L) \rightarrow (\neg J \vee K)) \wedge (M \rightarrow J) = 1$$

*где  $J, K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $J, K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.*

**Решение (вариант 1, использование свойств импликации):**

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице

- 3) учитывая, что  $J \rightarrow K = \bar{J} + K$ , и выполняя замены  $A = \bar{J} + K$  и  $B = M \cdot N \cdot L$ , получаем
- $$(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) \cdot (M \rightarrow J) = 1.$$

- 4) рассмотрим последнюю импликацию, которая должна быть равна 1:  $M \rightarrow J = 1$ ; по таблице истинности импликации сразу находим, что возможны три варианта:

- 1)  $M = J = 0$
- 2)  $M = 0, J = 1$
- 3)  $M = J = 1$

- 5) поскольку все (в том числе и первые две) импликации должны быть равны 1, по таблице истинности импликации сразу определяем, что  $A = B$ , то есть

$$\bar{J} + K = M \cdot N \cdot L$$

- 6) в случае «а» последнее уравнение превращается в  $1 + K = 0$  и не имеет решений  
 7) в случае «б» имеем  $K = 0$ , тогда как  $N$  и  $L$  – произвольные; поэтому есть 4 решения, соответствующие четырем комбинациям  $N$  и  $L$   
 8) в случае «в» получаем  $K = N \cdot L$ , то есть для  $K = 1$  есть единственное решение ( $N = L = 1$ ), а для  $K = 0$  – три решения (при  $N = L = 0; N = 1$  и  $L = 0; N = 0$  и  $L = 1$ )  
 9) проверяем, что среди решений, полученных в п. 7 и 8 нет одинаковых  
 10) таким образом, всего есть  $4 + 1 + 3 = 8$  решений  
 11) ответ – 8

**Решение (вариант 2, использование свойств импликации, А.М. Фридлянд, УГАТУ):**

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице

3) учитывая, что  $J \rightarrow K = \bar{J} + K$ , и выполняя замены  $A = \bar{J} + K$  и  $B = M \cdot N \cdot L$ , получаем

$$(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) \cdot (M \rightarrow J) = 1.$$

4) преобразуем первые две скобки:

$(A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) = (\bar{A} + B) \cdot (\bar{B} + A) = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = (A \equiv B)$ , где знак  $\equiv$  означает операцию «эквивалентность». Так как это выражение должно быть истинным, значения  $A$  и  $B$  совпадают. Поэтому исходное уравнение распадается на 2 случая:

$$1) \begin{cases} J \rightarrow K = 0 \\ M \cdot N \cdot L = 0 \\ M \rightarrow J = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} J \rightarrow K = 1 \\ M \cdot N \cdot L = 1 \\ M \rightarrow J = 1 \end{cases}$$

5) В случае а) из первого уравнения сразу получаем, что  $\begin{cases} J = 1 \\ K = 0 \end{cases}$ . Тогда третье уравнение

справедливо при любом  $M$ , а второе имеет 7 решений (любое, кроме  $M = N = L = 1$ ).

- 6) в случае б) из второго уравнения получаем:  $M = N = L = 1$ , но тогда из третьего уравнения следует, что  $J = 1$  (иначе  $M \rightarrow J = 1$ ), а тогда и  $K = 1$  (иначе  $J \rightarrow K = 0$ ).
- 7) таким образом, всего есть  $7 + 1 = 8$  решений
- 8) ответ – 8

**Решение (вариант 3, декомпозиция, автор идеи – А. Сидоров, ЭПИ МИСИС):**

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) идея заключается в том, что мы выбираем одну какую-нибудь переменную и отдельно рассматриваем случаи, когда она равна 0 и 1; такой подход, когда большая задача разбивается на несколько более простых, называют **декомпозицией**
- 3) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице
- 4) например, пусть  $M = 0$ ; тогда требуется, чтобы  $M \rightarrow J = 0 \rightarrow J = 1$ , по таблице истинности импликации получается, что при этом  $J$  может быть любое («из лжи следует что угодно»);
- 5) выполним второй шаг декомпозиции: рассмотрим отдельно варианты  $J = 0$  и  $J = 1$
- 6) при  $M = 0$  и  $J = 0$  получаем

$$[(0 \rightarrow K) \rightarrow 0] \cdot [0 \rightarrow 1] = 1$$

это равенство истинно, если  $0 \rightarrow K = 0$ , а такого не может быть, то есть в этом случае решений нет

7) при  $M = 0$  и  $J = 1$  получаем

$$[(1 \rightarrow K) \rightarrow 0] \cdot [0 \rightarrow K] = 1$$

это равенство истинно только при  $K = 0$  (иначе первая скобка равна нулю), но у нас никак не ограничены значения  $L$  и  $N$  поэтому получается, что при  $M = 0$  и  $J = 1$  есть 4 решения (при  $K = 0$  и всех 4-х различных комбинациях  $L$  и  $N$ )

8) теперь проверяем вариант, когда  $M = 1$ ; при этом

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (1 \rightarrow J) = 1$$

так как должно быть  $1 \rightarrow J = 1$ , по таблице истинности операции импликация сразу получаем  $J = 1$  и уравнение преобразуется к виду

$$[(1 \rightarrow K) \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow K] = 1$$

- 9) выполним второй шаг декомпозиции: рассмотрим отдельно варианты  $K = 0$  и  $K = 1$
- 10) при  $K = 0$  получаем  $[0 \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow 0] = 1$ , откуда сразу следует, что  $N \cdot L = 0$   
(3 решения:  $N = L = 0$ ;  $N = 1, L = 0$  и  $N = 0, L = 1$ )
- 11) при  $K = 1$  получаем  $[1 \rightarrow N \cdot L] \cdot [N \cdot L \rightarrow 1] = 1$ , откуда сразу следует, что  $N \cdot L = 1$   
(1 решение:  $N = L = 1$ )
- 12) таким образом, уравнение всего имеет  $4+3+1 = 8$  решений
- 13) ответ – 8

**Решение (вариант 4, декомпозиция, автор идеи – А. Сидоров, ЭПИ МИСИС):**

- 1) та же декомпозиция, но в другом порядке
- 2) сделаем сначала декомпозицию по  $J$
- 3) рассмотрим вариант, когда  $J = 0$ ; подставляя это значение в уравнение

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

получаем

$$[(0 \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 1] \cdot (M \rightarrow 0) = 1$$

- 4) учитывая, что  $0 \rightarrow K = 1$  при любом  $K$  («из лжи следует все, что угодно»), находим

$$[1 \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 1] \cdot (M \rightarrow 0) = 1$$

- 5) отсюда сразу следует, что  $M \rightarrow 0 = 1$  и по таблице истинности операции импликация определяем, что  $M = 0$ ; учитывая это, получаем

$$[1 \rightarrow 0] \cdot [0 \rightarrow 1] = 1$$

этого не может быть, потому что первая скобка равна нулю; поэтому при  $J = 0$  решений нет

- 6) теперь пусть  $J = 1$ , тогда  $\bar{J} + K = J \rightarrow K = 1 \rightarrow K = K$  и  $M \rightarrow J = M \rightarrow 1 = 1$ , поэтому остается уравнение

$$[K \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow K] = 1$$

- 7) выполним декомпозицию по переменной  $K$

- 8) при  $K = 0$  получаем  $[0 \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 0] = 1$ , что верно при условии  $M \cdot N \cdot L = 0$ ; из всех 8-ми комбинаций значений переменных  $M$ ,  $N$  и  $L$  только одна этому условию не удовлетворяет ( $M = N = L = 1$ ), поэтому имеем 7 решений
- 9) при  $K = 1$  получаем  $[1 \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow 1] = 1$ , что верно при условии  $M \cdot N \cdot L = 1$ ; из 8-ми комбинаций значений переменных  $M$ ,  $N$  и  $L$  только одна ( $M = N = L = 1$ ) удовлетворяет этому условию, поэтому имеем 1 решение

- 10) таким образом, уравнение всего имеет  $7+1 = 8$  решений

- 11) ответ – 8

#### Возможные проблемы:

- при использовании метода декомпозиции важен порядок выбора переменных для разбиения; можно рекомендовать в первую очередь делать декомпозицию по той переменной, которая чаще всего встречается в уравнении
- нужно помнить, что импликация равна нулю только в случае  $1 \rightarrow 0$ , часто именно это свойство позволяет упростить решение

**Решение (вариант 5, комбинированный, Т.Н. Наумова, ХМАО, Пыть-Ях, МОУ СОШ №5):**

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) имеем логическое произведение трех выражений, которое истинно тогда и только тогда, когда каждое выражение истинно; таким образом, нужно решить систему логических уравнений

$$(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L = 1, \quad M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K) = 1, \quad M \rightarrow J = 1$$

- 3) идея состоит в том, чтобы найти все решения одного из уравнений и проверить истинность остальных двух для всех полученных на предыдущем шаге комбинаций значений переменных
- 4) рассмотрим первое уравнение:  $(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L = 1$ ; оно справедливо в двух случаях:
- 1)  $J \rightarrow K = 0, M \cdot N \cdot L$  – любое, или  $J = 1, K = 0, L = *, M = *, N = *$ , где звездочка означает, что переменная может принимать значения 0 или 1; всего получается **8 вариантов**
  - 2)  $J \rightarrow K = 1, M \cdot N \cdot L = 1$ , что дает еще **три варианта**:
- $J = 0, K = *, L = 1, M = 1, N = 1$  – два варианта  
 $J = 1, K = 1, L = 1, M = 1, N = 1$  – один вариант
- 5) остается проверить истинность второго  $(M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K) = 1)$  и третьего  $(M \rightarrow J = 1)$  равенств для этих 11 вариантов; сразу видим, что импликация  $M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K)$  ложна только тогда, когда  $M \cdot N \cdot L = 1, \bar{J} + K = 0$ , то есть для комбинации (10111), а импликация  $M \rightarrow J$  ложна для  $M = 1, J = 0$  при любых значениях остальных переменных:

J	K	L	M	N	$M \cdot N \cdot L \rightarrow (\bar{J} + K) = 1$	$M \rightarrow J = 1$
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

- 6) таким образом, остается 8 вариантов, отмеченных галочками справа от таблицы  
 7) ответ – **8**

✓  
 ✓  
 ✓  
 ✓  
 ✓  
 ✓  
 ✓  
 ✓  
 ✓

### Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((J \wedge \neg K) \rightarrow \neg(M \wedge N \wedge L)) \wedge (M \rightarrow J) = 1$$

где  $J, K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $J, K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

**Решение (вариант 1, упрощение выражения):**

- 1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$[(J \rightarrow K) \rightarrow M \cdot N \cdot L] \cdot [(J \cdot \bar{K}) \rightarrow \overline{M \cdot N \cdot L}] \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

- 2) попытаемся использовать замену переменных

$$A = J \rightarrow K = \bar{J} + K, \quad B = M \cdot N \cdot L$$

- 3) тогда  $J \cdot \bar{K} = \bar{J} + \bar{K} = \bar{J \rightarrow K} = \bar{A}$

- 4) с учетом этих обозначений преобразуем исходное уравнение к виду:

$$(A \rightarrow B) \cdot (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \cdot (M \rightarrow J) = 1$$

5) раскрываем импликации по правилу  $A \rightarrow B = \bar{A} + B$ :

$$(\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B}) \cdot (\bar{M} + J) = 1$$

6) перемножаем первые две скобки, учитывая, что  $A \cdot \bar{A} = B \cdot \bar{B} = 0$ :

$$(\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B) \cdot (\bar{M} + J) = 1$$

7) снова раскрываем скобки

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{M} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot J + A \cdot B \cdot \bar{M} + A \cdot B \cdot J = 1$$

8) возвращаемся к исходным переменным, вспоминая, что  $\bar{A} = J \cdot \bar{K}$

$$J \cdot \bar{K} \cdot \bar{M} \cdot N \cdot L \cdot \bar{M} + J \cdot \bar{K} \cdot \bar{M} \cdot N \cdot L \cdot J + (\bar{J} + K) \cdot M \cdot N \cdot L \cdot \bar{M} + (\bar{J} + K) \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

9) далее используем равенства  $M \cdot \bar{M} = J \cdot \bar{J} = 0$  и  $J \cdot J = J$ , два слагаемых обращаются в нуль:

$$J \cdot \bar{K} \cdot \bar{M} \cdot N \cdot L \cdot \bar{M} + J \cdot \bar{K} \cdot \bar{M} \cdot N \cdot L + K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

10) выносим общий множитель из первых двух слагаемых, в скобках остается выражение  $\bar{M} + 1 = 1$

$$J \cdot \bar{K} \cdot \bar{M} \cdot N \cdot L \cdot (\bar{M} + 1) + K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

$$J \cdot \bar{K} \cdot \bar{M} \cdot N \cdot L + K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1$$

11) такие образом, уравнение разбивается на два:

$$J \cdot \bar{K} \cdot \bar{M} \cdot N \cdot L = J \cdot \bar{K} \cdot (\bar{M} + \bar{N} + \bar{L}) = 1 \quad (*)$$

$$K \cdot M \cdot N \cdot L \cdot J = 1 \quad (**)$$

12) из уравнения  $J \cdot \bar{K} \cdot (\bar{M} + \bar{N} + \bar{L}) = 1$  следует, что  $J = 1, K = 0$  и хотя бы одна из

переменных  $M, N, L$  не равна 1; поэтому уравнение (\*) имеет 7 решений (за исключением случая  $M = N = L = 1$ )

13) уравнение (\*\*) имеет единственное решение  $J = K = M = N = L = 1$

14) среди решений уравнений (\*) и (\*\*) нет одинаковых (в первом случае  $K = 0$ , а во втором -  $K = 1$ ), поэтому исходное уравнение имеет  $7 + 1 = 8$  решений.

15) ответ – 8.

## Задачи для тренировки<sup>8</sup>:

- 1) Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание  
 $(90 < x \cdot x) \rightarrow (x < (x-1))$
- 2) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 3) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(\neg K \vee M) \rightarrow (\neg L \vee M \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

- 4) Каково наименьшее целое положительное число X, при котором высказывание:

$$(4 > - (4 + x) \cdot x) \rightarrow (30 > x \cdot x)$$

будет ложным.

- 5) Каково наибольшее целое положительное число X, при котором истинно высказывание:

$$((x - 1) < x) \rightarrow (40 > x \cdot x)$$

- 6) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(\neg(M \vee L) \wedge K) \rightarrow ((\neg K \wedge \neg M) \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

- 7) Каково наименьшее натуральное число X, при котором высказывание

$$\neg(x \cdot x < 9) \rightarrow (x > (x + 2))$$

будет ложным?

- 8) Укажите значения логических переменных P, Q, S, T, при которых логическое выражение

$$(P \vee \neg Q) \vee (Q \rightarrow (S \vee T))$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных P, Q, S, T (в указанном порядке).

- 9) Каково наибольшее целое положительное число X, при котором высказывание:

$$((x + 6) \cdot x + 9 > 0) \rightarrow (x \cdot x > 20)$$

<sup>8</sup> Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2013 гг.
2. Тренировочные и диагностические работы МИОО.
3. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
4. Якушкин П.А., Крылов С.С. ЕГЭ-2010. Информатика: сборник экзаменационных заданий. — М.: Эксмо, 2009.
5. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.
6. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2010. Информатика. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.
7. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
8. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. — М.: НИИ школьных технологий, 2010.
9. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
10. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ 2011. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-центр, 2011.
11. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
12. Евич Л.Н., Лысенко Ф.Ф. (ред.) Информатика и ИКТ. Подготовка к ЕГЭ-2013. — Ростов-на-Дону: Легион, 2012.

будет ложным?

- 10) Составьте таблицу истинности для логической функции

$$x = (A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg(B \vee A))$$

в которой столбец значений аргумента  $A$  представляет собой двоичную запись числа 226, столбец значений аргумента  $B$  – числа 154, столбец значений аргумента  $C$  – числа 75. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции  $X$  в десятичную систему счисления.

- 11) Составьте таблицу истинности для логической функции

$$x = \neg(A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A))$$

в которой столбец значений аргумента  $A$  представляет собой двоичную запись числа 216, столбец значений аргумента  $B$  – числа 30, столбец значений аргумента  $C$  – числа 170. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции  $X$  в десятичную систему счисления.

- 12) Известно, что для чисел  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  истинно высказывание

$$(Z < X \vee Z < Y) \wedge \neg(Z+1 < X) \wedge \neg(Z+1 < Y)$$

Чему равно  $Z$ , если  $X=25$  и  $Y=48$ ?

- 13) Укажите значения переменных  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \vee (L \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что  $K=1$ ,  $L=1$ ,  $M=0$ ,  $N=1$ .

- 14) Укажите значения переменных  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \wedge (K \rightarrow \neg M) \wedge (\neg K \rightarrow (M \wedge \neg L \wedge N))$$

истинно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что  $K=1$ ,  $L=1$ ,  $M=0$ ,  $N=1$ .

- 15)  $A$ ,  $B$  и  $C$  – целые числа, для которых истинно высказывание:

$$(C < A \vee C < B) \wedge \neg(C+1 < A) \wedge \neg(C+1 < B)$$

Чему равно  $C$ , если  $A=45$  и  $B=18$ ?

- 16) Сколько различных решений имеет уравнение

$$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0$$

где  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 17)  $A$ ,  $B$  и  $C$  – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((B < A) \rightarrow (2C > A)) \wedge ((A < B) \rightarrow (A > 2C))$$

Чему равно  $A$ , если  $C = 8$  и  $B = 18$ ?

- 18) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L) \vee (M \wedge N) = 1$$

где  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

- 19) Каково наибольшее целое положительное число  $x$ , при котором истинно высказывание:

$$(x \cdot x - 1 > 100) \rightarrow (x \cdot (x-1) < 100)$$

- 20) Каково наибольшее целое положительное число  $x$ , при котором ложно высказывание:

$$(8 \cdot x - 6 < 75) \rightarrow (x \cdot (x-1) > 65)$$

21) Каково наибольшее целое положительное число  $X$ , при котором должно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 55) \rightarrow (X \cdot X > 50)$$

22) Каково наибольшее целое положительное число  $X$ , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > X \cdot X + 7) \rightarrow (X \cdot (X+1) \leq X \cdot X + 7)$$

23) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L \vee M) \wedge (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где  $K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

24) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \rightarrow (\neg M \wedge N) = 1$$

где  $K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

25) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L) \wedge (M \vee N) = 1$$

где  $K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

26) Сколько различных решений имеет уравнение

$$( (A \rightarrow B) \wedge C) \vee (D \wedge \neg D) = 1,$$

где  $A, B, C, D$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $A, B, C, D$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

27) Каково наибольшее целое положительное число  $X$ , при котором должно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 85) \rightarrow (X \cdot X > 90)$$

28) Каково наибольшее целое положительное число  $X$ , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+2) > X \cdot X + 30) \rightarrow (X \cdot (X+2) \leq X \cdot X + 30)$$

29) Каково наибольшее целое положительное число  $X$ , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 7 > 15) \rightarrow (X \cdot X + 8 < 35)$$

30) Каково наибольшее целое положительное число  $X$ , при котором должно высказывание:

$$(9 \cdot X + 5 > 60) \rightarrow (X \cdot X > 80)$$

31) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg M \wedge K \wedge \neg N \wedge \neg J \wedge (L \vee \neg L) = 0$$

где  $J, K, L, M, N$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений  $J, K, L, M$  и  $N$ , при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

32) Каково наибольшее целое число  $X$ , при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 1 > 30) \rightarrow (X \cdot (X-1) < 30)$$

33) Укажите значения переменных  $K, L, M, N$ , при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow \neg M) \vee (\neg L \wedge M \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных  $K, L, M$  и  $N$  (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что  $K=1, L=1, M=0, N=1$ .

34) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(\neg K \vee \neg L \vee \neg M) \wedge (L \vee \neg M \vee \neg N) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

35) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N)) \wedge ((J \wedge \neg K) \rightarrow (\neg M \vee \neg N)) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee K \vee L) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

36) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \vee K \vee L) \rightarrow \neg(M \rightarrow N)) \wedge ((\neg J \wedge \neg K \wedge \neg L) \rightarrow (\neg M \vee N)) \wedge (M \vee \neg N \vee K) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

37) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg((J \rightarrow K) \rightarrow (L \wedge M \wedge N)) \vee \neg((L \wedge M \wedge N) \rightarrow (\neg J \vee K)) \vee (M \wedge J) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

38) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(M \wedge \neg(L \vee K)) \rightarrow (\neg(K \wedge M) \wedge N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

39) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K \wedge \neg L \wedge \neg N) \rightarrow (\neg L \rightarrow M)) \vee ((\neg K \vee L \vee N) \rightarrow (\neg L \wedge \neg M)) \wedge (K \vee N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

40) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((\neg K \rightarrow M) \rightarrow (M \wedge \neg L \wedge \neg N)) \vee ((\neg K \wedge \neg M) \rightarrow (\neg M \vee L \vee N)) \wedge (L \wedge M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

41) A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((A > B) \rightarrow (C = B)) \wedge ((B > A) \rightarrow (C = A))$$

Чему равно B, если A = 45 и C = 18?

42) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \vee Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge P) = 1$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

43) Каково наименьшее положительное число X, при котором можно высказывание:

$$(82 < x \cdot x) \rightarrow (81 > (x-1) \cdot (x-1))$$

44) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(x \wedge y \vee z) \rightarrow (z \vee p) = 0$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

45) Каково наименьшее натуральное число X, при котором истинно высказывание:

$$(x \cdot (x+1) < 50) \rightarrow (x \cdot x > 35)$$

46) Каково наибольшее натуральное число X, при котором истинно высказывание:

$$(x \cdot (x+1) > 99) \rightarrow (x \cdot x < 65)$$

47) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$(|x| \geq 5) \vee (|x| < 1)$$

48) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$\neg((|x| < 5) \wedge (|x| < 1) \wedge (|x| < 10))$$

49) Сколько существует целых значений X, при которых ложно высказывание:

$$((x-4) \cdot (x-6) \geq 0) \rightarrow (x \cdot x - 12 \cdot x + 35 > 0)$$

50) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \rightarrow K \wedge \neg(L \rightarrow M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

51) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(J \rightarrow L) \wedge (K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \wedge (L \rightarrow M) \wedge (M \rightarrow K) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

52) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((x_1 \equiv x_2) \wedge (x_3 \equiv x_4)) \vee (\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_3 \equiv x_4)) = 0$$

$$((x_3 \equiv x_4) \wedge (x_5 \equiv x_6)) \vee (\neg(x_3 \equiv x_4) \wedge \neg(x_5 \equiv x_6)) = 0$$

$$((x_5 \equiv x_6) \wedge (x_7 \equiv x_8)) \vee (\neg(x_5 \equiv x_6) \wedge \neg(x_7 \equiv x_8)) = 0$$

$$((x_7 \equiv x_8) \wedge (x_9 \equiv x_{10})) \vee (\neg(x_7 \equiv x_8) \wedge \neg(x_9 \equiv x_{10})) = 0$$

где x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, ..., x<sub>10</sub> – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

53) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \equiv x_3) = 1$$

$$(x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_2 \equiv x_4) = 1$$

...

$$(x_7 \wedge x_8) \vee (\neg x_7 \wedge \neg x_8) \vee (x_7 \equiv x_9) = 1$$

$$(x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_8 \wedge \neg x_9) \vee (x_8 \equiv x_{10}) = 0$$

где x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, ..., x<sub>10</sub> – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

54) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) = 1$$

$$(x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_3 \wedge \neg x_4) = 1$$

...

$$(x_7 \wedge x_8) \vee (\neg x_7 \wedge \neg x_8) \vee (x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_8 \wedge \neg x_9) = 1$$

$$(x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_8 \wedge \neg x_9) \vee (x_9 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge \neg x_{10}) = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

55) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(x_1 \equiv x_2) \vee (x_1 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

$$(x_2 \equiv x_3) \vee (x_2 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

...

$$(x_9 \equiv x_{10}) \vee (x_9 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

$$(x_1 \equiv x_{10}) = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

56) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((x_1 \equiv x_2) \vee (x_3 \equiv x_4)) \wedge (\neg(x_1 \equiv x_2) \vee \neg(x_3 \equiv x_4)) = 1$$

$$((x_3 \equiv x_4) \vee (x_5 \equiv x_6)) \wedge (\neg(x_3 \equiv x_4) \vee \neg(x_5 \equiv x_6)) = 1$$

$$((x_5 \equiv x_6) \vee (x_7 \equiv x_8)) \wedge (\neg(x_5 \equiv x_6) \vee \neg(x_7 \equiv x_8)) = 1$$

$$((x_7 \equiv x_8) \vee (x_9 \equiv x_{10})) \wedge (\neg(x_7 \equiv x_8) \vee \neg(x_9 \equiv x_{10})) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

57) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge \neg(x_2 \equiv x_3) = 1$$

$$\neg(x_2 \equiv x_3) \wedge \neg(x_3 \equiv x_4) = 1$$

...

$$\neg(x_8 \equiv x_9) \wedge \neg(x_9 \equiv x_{10}) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

58) Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_5 \vee \neg x_6) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

59) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) = 1$$

$$(\neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) = 1$$

...

$$(\neg x_7 \wedge \neg x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_7 \wedge x_8 \wedge \neg x_9) \vee (x_7 \wedge \neg x_8 \wedge \neg x_9) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_9$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 60) (<http://ege.yandex.ru/informatics>) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \vee y_1 = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 61) (С.Э. Назаренко, МОУ СОШ №7 г.Ноябрьска) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(\neg x_1 \rightarrow x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_3 \rightarrow x_4) \wedge (\neg x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (\neg y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow y_4) \wedge (\neg y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \vee y_1 = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 62) (С.Э. Назаренко) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (\neg x_3 \rightarrow \neg x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(\neg y_1 \rightarrow \neg y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow \neg y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \wedge y_1 = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 63) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_5 \wedge y_5 = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 64) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \wedge x_4 = 1$$

$$x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \wedge x_6 = 1$$

$$x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7 \wedge x_8 = 1$$

$$x_7 \vee \neg x_8 \vee \neg x_9 \wedge x_{10} = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

- 65) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \vee \mathbf{x}_3 \wedge \neg \mathbf{x}_4 &= 1 \\
 (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \vee \mathbf{x}_5 \wedge \neg \mathbf{x}_6 &= 1 \\
 (\mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) \vee \mathbf{x}_7 \wedge \neg \mathbf{x}_8 &= 1 \\
 (\mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_8) \vee \mathbf{x}_9 \wedge \neg \mathbf{x}_{10} &= 1 \\
 (\mathbf{x}_9 \rightarrow \mathbf{x}_{10}) \vee \mathbf{x}_1 \wedge \neg \mathbf{x}_2 &= 1
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

66) Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_1) = 1$$

где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

67) Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_5 \rightarrow \neg \mathbf{x}_1) = 1$$

где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

68) (<http://ege.yandex.ru>) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) &= 1 \\
 (\mathbf{y}_5 \rightarrow \mathbf{y}_4) \wedge (\mathbf{y}_4 \rightarrow \mathbf{y}_3) \wedge (\mathbf{y}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1) &= 1 \\
 \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{y}_3 &= 1
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

69) (<http://ege.yandex.ru>) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) &= 1 \\
 (\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_3) \wedge (\mathbf{y}_3 \rightarrow \mathbf{y}_4) \wedge (\mathbf{y}_4 \rightarrow \mathbf{y}_5) &= 1 \\
 \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_1 &= 1
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

70) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) &= 1 \\
 (\mathbf{y}_5 \rightarrow \mathbf{y}_4) \wedge (\mathbf{y}_4 \rightarrow \mathbf{y}_3) \wedge (\mathbf{y}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1) &= 1 \\
 \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_1 &= 1
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

71) (<http://ege.yandex.ru>) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) &= 1 \\
 (\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_3) \wedge (\mathbf{y}_3 \rightarrow \mathbf{y}_4) \wedge (\mathbf{y}_4 \rightarrow \mathbf{y}_5) &= 1
 \end{aligned}$$

$$(x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

72) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$(x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2) \wedge (x_3 \rightarrow y_3) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

73) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$(x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2) \wedge (x_3 \rightarrow y_3) \wedge (x_4 \rightarrow y_4) = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

74) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 = 1$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_6 = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

75) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 = 1$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

76) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 = 0$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 = 1$$

$$z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow z_4 = 0$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4, z_1, z_2, \dots, z_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

77) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 = 1$$

$$y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_6 = 1$$

$$x_1 \rightarrow y_1 = 1$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

78) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}x_1 &\rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 = 1 \\y_1 &\rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 = 1 \\x_1 &\rightarrow y_5 = 1\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

79) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}x_1 &\rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 = 1 \\y_1 &\rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 = 0 \\x_1 &\rightarrow y_5 = 1\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

80) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}x_1 &\rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 = 0 \\y_1 &\rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 = 0 \\x_1 &\rightarrow y_5 = 1\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

81) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}x_1 &\rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 = 1 \\y_1 &\rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_6 = 1 \\x_1 &\rightarrow y_6 = 0 \\y_1 &\rightarrow x_6 = 0\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

82) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{aligned}(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_4) &= 0 \\(x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_5 \vee \neg x_6) &= 0 \\(x_5 \vee x_6) \wedge (\neg x_7 \vee \neg x_8) &= 0 \\(x_7 \vee x_8) \wedge (\neg x_9 \vee \neg x_{10}) &= 0\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

83) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$



где  $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

90) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) &= 1 \\ (\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_2 \vee y_2) &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

91) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) &= 1 \\ (\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

92) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) &= 1 \\ (\neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee y_3) \wedge (\neg y_3 \vee y_4) &= 1 \\ (\neg y_1 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee x_2) \wedge (\neg y_3 \vee x_3) \wedge (\neg y_4 \vee x_4) &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_4, y_1, y_2, \dots, y_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

93) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) \wedge (y_5 \rightarrow y_6) &= 1 \\ x_1 \vee y_1 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

94) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) &= 1 \\ x_2 \vee y_2 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

95) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) &= 1 \\ x_5 \rightarrow y_5 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

96) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) &= 1 \\ x_5 \vee y_5 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

97) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_4) &= 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow (x_5 \rightarrow x_6) &= 1 \\ (x_5 \rightarrow x_6) \rightarrow (x_7 \rightarrow x_8) &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_8$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

98) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_4) &= 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow (x_5 \rightarrow x_6) &= 1 \\ (x_5 \rightarrow x_6) \rightarrow (x_7 \rightarrow x_8) &= 1 \\ (x_7 \rightarrow x_8) \rightarrow (x_9 \rightarrow x_{10}) &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

99) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) &= 1 \\ (\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (\neg y_2 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow y_4) \wedge (\neg y_4 \rightarrow y_5) &= 1 \\ \neg x_1 \vee y_1 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

100) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (x_2 \rightarrow \neg x_3) \wedge (x_3 \rightarrow \neg x_4) \wedge (x_4 \rightarrow \neg x_5) &= 1 \\ (y_1 \rightarrow \neg y_2) \wedge (y_2 \rightarrow \neg y_3) \wedge (y_3 \rightarrow \neg y_4) \wedge (y_4 \rightarrow \neg y_5) &= 1 \\ \neg x_1 \vee y_1 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

101) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (\neg x_1 \rightarrow x_3) \wedge (x_1 \rightarrow x_4) \wedge (\neg x_1 \rightarrow x_5) &= 1 \\ (\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_1 \rightarrow y_3) \wedge (\neg y_1 \rightarrow y_4) \wedge (y_1 \rightarrow y_5) &= 1 \\ \neg x_1 \vee y_1 \wedge (\neg x_1 \vee y_5) &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

102) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (x_1 \rightarrow \neg x_3) \wedge (x_1 \rightarrow \neg x_4) \wedge (x_1 \rightarrow \neg x_5) &= 1 \\ (\neg y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow \neg y_3) \wedge (\neg y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow \neg y_5) &= 1 \\ (\neg x_1 \vee y_1) \wedge x_1 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_5, y_1, y_2, \dots, y_5$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

103) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{aligned} (X_1 \equiv X_2) \rightarrow (X_2 \equiv X_3) &= 1 \\ (X_2 \equiv X_3) \rightarrow (X_3 \equiv X_4) &= 1 \\ &\dots \\ (X_5 \equiv X_6) \rightarrow (X_6 \equiv X_7) &= 1 \end{aligned}$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_7$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

104) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{aligned} (X_1 \vee X_2) \rightarrow (X_3 \vee X_4) &= 1 \\ (X_3 \vee X_4) \rightarrow (X_5 \vee X_6) &= 1 \\ (X_5 \vee X_6) \rightarrow (X_7 \vee X_8) &= 1 \end{aligned}$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_8$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

105) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) &= 1 \\ \neg x_1 \wedge y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge \neg y_1 \wedge z_1 \vee x_1 \wedge y_1 \wedge \neg z_1 &= 1 \\ \neg x_2 \wedge y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge \neg y_2 \wedge z_2 \vee x_2 \wedge y_2 \wedge \neg z_2 &= 1 \\ \neg x_3 \wedge y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge \neg y_3 \wedge z_3 \vee x_3 \wedge y_3 \wedge \neg z_3 &= 1 \\ \neg x_4 \wedge y_4 \wedge z_4 \vee x_4 \wedge \neg y_4 \wedge z_4 \vee x_4 \wedge y_4 \wedge \neg z_4 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4, z_1, \dots, z_4$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

106) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) &= 1 \\ (y_2 \rightarrow y_1) \wedge (y_3 \rightarrow y_2) \wedge (y_4 \rightarrow y_3) \wedge (y_5 \rightarrow y_4) \wedge (y_6 \rightarrow y_5) &= 1 \\ x_6 \rightarrow y_6 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

107) Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) = 1 \\
 & (\mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1) \wedge (\mathbf{y}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2) \wedge (\mathbf{y}_4 \rightarrow \mathbf{y}_3) \wedge (\mathbf{y}_5 \rightarrow \mathbf{y}_4) \wedge (\mathbf{y}_6 \rightarrow \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & \mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 = 1
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_6, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

108) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{y}_3) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{y}_4) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_6 \wedge \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{y}_6) = 1 \\
 & \mathbf{x}_7 \vee \mathbf{y}_7 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

109) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{y}_3) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{y}_4) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_6 \wedge \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_6) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_7 \vee \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{x}_7 \wedge \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{y}_7) = 1 \\
 & \mathbf{x}_8 \vee \mathbf{y}_8 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_8, y_1, \dots, y_8$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

110) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{y}_3) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{y}_4) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & \mathbf{x}_5 \vee \mathbf{y}_6 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$  – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

111) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{y}_3) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{y}_4) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_6 \wedge \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_6) = 1 \\
 & \mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_7 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

112) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{y}_1) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{y}_3) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{y}_4) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_6 \wedge \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_6) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_7 \vee \mathbf{x}_8) \wedge (\mathbf{x}_7 \wedge \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{x}_9) \wedge (\mathbf{x}_7 \vee \mathbf{y}_7) = 1 \\
 & \mathbf{x}_7 \vee \mathbf{y}_8 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_8, y_1, \dots, y_8$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

113) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{y}_3) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_4) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & \mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_6 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

114) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_2 \vee \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_3 \vee \mathbf{x}_4) \wedge (\mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{y}_3) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_4) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{x}_6) \wedge (\mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{y}_5) = 1 \\
 & (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{x}_7) \wedge (\mathbf{x}_6 \wedge \mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{y}_6) = 1 \\
 & \mathbf{x}_7 \vee \mathbf{y}_7 = 1
 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

115) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \wedge x_2 \rightarrow y_1) = 1$$

$$(x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \wedge x_3 \rightarrow y_2) = 1$$

$$(x_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \wedge x_4 \rightarrow y_3) = 1$$

$$(x_4 \vee x_5) \wedge (x_4 \wedge x_5 \rightarrow y_4) = 1$$

$$(x_5 \vee x_6) \wedge (x_5 \wedge x_6 \rightarrow y_5) = 1$$

$$(x_6 \vee x_7) \wedge (x_6 \wedge x_7 \rightarrow y_6) = 1$$

$$(x_7 \vee x_8) \wedge (x_7 \vee y_7) = 1$$

$$x_8 \vee y_8 = 1$$

где  $x_1, \dots, x_8, y_1, \dots, y_8$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

116) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \vee y_1) \wedge ((\neg x_1 \vee \neg y_1) \rightarrow (\neg x_2 \vee \neg y_2)) = 1$$

$$(x_2 \vee y_2) \wedge ((\neg x_2 \vee \neg y_2) \rightarrow (\neg x_3 \vee \neg y_3)) = 1$$

$$(x_3 \vee y_3) \wedge ((\neg x_3 \vee \neg y_3) \rightarrow (\neg x_4 \vee \neg y_4)) = 1$$

$$(x_4 \vee y_4) \wedge ((\neg x_4 \vee \neg y_4) \rightarrow (\neg x_5 \vee \neg y_5)) = 1$$

$$(x_5 \vee y_5) \wedge ((\neg x_5 \vee \neg y_5) \rightarrow (\neg x_6 \vee \neg y_6)) = 1$$

$$x_6 \vee y_6 = 1$$

где  $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

117) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \vee y_1) \wedge ((\neg x_1 \vee \neg y_1) \rightarrow (\neg x_2 \vee \neg y_2)) = 1$$

$$(x_2 \vee y_2) \wedge ((\neg x_2 \vee \neg y_2) \rightarrow (\neg x_3 \vee \neg y_3)) = 1$$

$$(x_3 \vee y_3) \wedge ((\neg x_3 \vee \neg y_3) \rightarrow (\neg x_4 \vee \neg y_4)) = 1$$

$$(x_4 \vee y_4) \wedge ((\neg x_4 \vee \neg y_4) \rightarrow (\neg x_5 \vee \neg y_5)) = 1$$

$$(x_5 \vee y_5) \wedge ((\neg x_5 \vee \neg y_5) \rightarrow (\neg x_6 \vee \neg y_6)) = 1$$

$$(x_6 \vee y_6) \wedge ((\neg x_6 \vee \neg y_6) \rightarrow (\neg x_7 \vee \neg y_7)) = 1$$

$$x_7 \vee y_7 = 1$$

где  $x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

118) Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \vee y_1) \wedge ((\neg x_1 \vee \neg y_1) \rightarrow (\neg x_2 \vee \neg y_2)) = 1$$

$$(x_2 \vee y_2) \wedge ((\neg x_2 \vee \neg y_2) \rightarrow (\neg x_3 \vee \neg y_3)) = 1$$

$$(x_3 \vee y_3) \wedge ((\neg x_3 \vee \neg y_3) \rightarrow (\neg x_4 \vee \neg y_4)) = 1$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_4 \vee \mathbf{y}_4) \wedge ((\neg \mathbf{x}_4 \vee \neg \mathbf{y}_4) \rightarrow (\neg \mathbf{x}_5 \vee \neg \mathbf{y}_5)) &= 1 \\ (\mathbf{x}_5 \vee \mathbf{y}_5) \wedge ((\neg \mathbf{x}_5 \vee \neg \mathbf{y}_5) \rightarrow (\neg \mathbf{x}_6 \vee \neg \mathbf{y}_6)) &= 1 \\ (\mathbf{x}_6 \vee \mathbf{y}_6) \wedge ((\neg \mathbf{x}_6 \vee \neg \mathbf{y}_6) \rightarrow (\neg \mathbf{x}_7 \vee \neg \mathbf{y}_7)) &= 1 \\ (\mathbf{x}_7 \vee \mathbf{y}_7) \wedge ((\neg \mathbf{x}_7 \vee \neg \mathbf{y}_7) \rightarrow (\neg \mathbf{x}_8 \vee \neg \mathbf{y}_8)) &= 1 \\ \mathbf{x}_8 \vee \mathbf{y}_8 &= 1 \end{aligned}$$

где  $x_1, \dots, x_8, y_1, \dots, y_8$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.