7 класс

1. Если любые две подряд цифры натурального числа изображают натуральное число, делящееся на 13, то назовем такое число суеверным. *Сколько существует суеверных стозначных чисел?*

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что если мы знаем первую цифру числа, то знаем все остальные (максимум одно двузначное число, начинающееся на данную цифру, кратно 13). Выпишем все двузначные числа, кратные 13: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. При этом на 78 число начинаться не может, так как третью цифру согласно условию не написать. Остальные варианты подходят, в итоге ответ 6.

2. На далекой планете каждый инопланетянин должен носить по одной сережке в каждом ухе из двух. Сережки бывают стеклянные, оловянные или деревянные. Однажды собрались 15 инопланетян, у которых на всех было 10 стеклянных, 10 оловянных и 10 деревянных сережек. Когда они встали в круг, оказалось, что ни у каких двух соседей не найдется по одной сережке одного и того же вида. Какое наибольшее количество инопланетян может носить две сережки разных видов?

Ответ: 6.

Решение. Будем обозначать ОО – иноплов с двумя оловянными сережками, ДС – с деревянной и стеклянной и т.д. Пусть в кругу есть x иноплов СО. Тогда все их соседи только ДД. Но тогда всего соседей у этих x иноплов суммарно хотя бы $x+1$. Тогда иноплов ДД хотя бы $x+1$. Аналогично, если ОД иноплов всего y, то СС иноплов хотя бы $y+1$, и если ДС всего z, то ОО – хотя бы $z+1$. Но тогда всего иноплов ровно 15, а с другой стороны хотя бы $x+y+z+(x+1)+(y+1)+(z+1)=2(x+y+z)+3$. Значит, $x+y+z$, то есть, искомое количество, не больше 6. Пример: СС, ОД, СС, ОД, СС, ОО, ДС, ОО, ДС, ОО, ДД, ОС, ДД, ОС, ДД. В этом ряду ровно 6 человек носят разные сережки.

3. *Сеня и Робот играют в игру. Они по очереди увеличивают число, написанное на доске, на 2, 5, 6 или 9. В начале на доске написано число 0, первым ходит Сеня. Выигрывает тот, после чьего хода получится число, делящееся на 2022. Кто может наверняка победить при любой игре соперника? Объясните свой ответ.*

Ответ: Сеня.

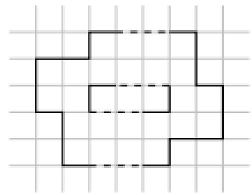
Решение. Пусть Сеня сначала напишет 9, а потом будет дополнять ход Робота так, чтобы сумма их ходов прибавляла 11 (если Робот добавляет 5, то Сеня добавляет 6 и наоборот, если Робот добавляет 2, то Сеня добавляет 9 и наоборот). Таким образом, после хода Сени число имеет вид $11k+9$. При этом никакое число такого вида не будет пропущено, так как Робот и Сеня добавляют ровно 11. А после хода Робота число может иметь только один из следующих видов: $11k$ (если Робот добавляет 2), $11k+3$ (если Робот добавляет 5), $11k+4$ (если Робот добавляет 6), $11k+7$ (если Робот добавляет 9). Заметим, что $2022=183\cdot 11+9$. Поэтому этого значения добьется именно Сеня.

4. *На доске нарисована клетчатая фигурка. Известно, что эту фигуру можно разрезать на квадраты* 2×2, *а можно разрезать на «Z-тетраминошки» («Z-тетраминошку», например, заполняют клетки «a1», «b1», «b2», «c2» на шахматной доске; эти фигуры можно поворачивать и переворачивать).*

а) Приведите пример такой фигуры;

б) Сколько клеток может быть в такой фигуре? Приведите все варианты количества *клеток и докажите, что других нет.*

а)



б) Ответ: любое кратное 8 количество, начиная с 16.

Решение. Заметим, что в каждой строке и в каждом столбце такой фигурки четное число клеток, так как её можно разрезать на квадратики 2×2. Разрежем фигурку на косые тетрамино и посмотрим на вертикальные из них. В самой верхней строчке четное число вертикальных косых тетраминошек. Выкинем их. Из каждой строчки и из каждого столбца при этом ушло четное число клеток. Повторим эту операцию последовательно сверху вниз для каждой из строчек. В итоге получим, что вертикальных косых тетраминошек четное число. Аналогично, горизонтальных тетрамино четное число. Осталось заметить, что 8 не подходит. Это очевидно, так как у нас есть только два различных способа составить фигурку из двух квадратов.

5. *В отряде дядьки Черномора 99 богатырей, которые сидят за круглым столом. Черномор знает всех богатырей по именам, но сам находится в командировке за тридевять земель и не видит как сидят богатыри. Черномор может назвать имена двух богатырей, и волшебный перстень сообщит ему, сколько богатырей сидит между двумя названными богатырями (из двух дуг выбирает меньшую). Сможет ли Черномор узнать хотя бы одну пару рядом сидящих богатырей, задав перстню не более 50 вопросов?*

Решение. Черномор задаёт первые 49 вопросов про некоторого богатыря *Бг* и произвольные 49 остальных богатырей. Если хотя бы на один из вопросов он получает ответ «0», его цель достигнута. Иначе он получает ответы от 1 до 48 (причем каждый ответ может быть получен не более двух раз). Пусть каждый раз после получения ответа Черномор зачеркивает клетку в таблице 2×48 – верхнюю клетку соответствующего столбца, если такой ответ получен впервые, и нижнюю, если он получен второй раз. Тогда после 49 вопросов в каком-то квадрате 2×2 окажутся зачеркнутыми хотя бы три клетки, так как таблица состоит из 24 таких квадратов, а вопросов задано больше, чем $2 \cdot 24 = 48$. Это значит, что Черномор знает трех богатырей, которые сидят в вершинах некоторой «трапеции». Эти вершины находятся от *Бг* на расстоянии n или $n+1$. Спросив 50-ым вопросом расстояние между парой богатырей с разными расстояниями от *Бг*, Черномор узнает, являются ли они соседними. Если нет, то одна из них является соседней с третьей из вершин этой трапеции.

8 класс

1. *Антон и Боря делают кораблики. Они сделали три одинаковых яхты, причем Боря сделал 20% всей работы. Эти три яхты они продали, а выручку разделили пропорционально вложенному труду. Антон посчитал, что если он подарит Боре 800 рублей, а Боря сделает и продаст ещё одну такую же яхту, то у них будет поровну денег. Сколько стоит одна яхта?*

Ответ: 2000.

Решение. Боря сделал пятую часть всей работы, то есть он сделал 0,6 одной яхты, а Антон оставшиеся 2,4. То есть разница в 1,8 яхты. Если Боря сделает ещё яхту, то разность будет 0,8 одной яхты. Антон отдал 800 своих рублей, тем самым он уменьшил количество денег у себя на 800 рублей и на ту же сумму увеличил количество денег у Бори. То есть изменил разность количество денег у одного и у другого на 1600 рублей. Итак, 0,8 яхты соответствует 1600 рублям. Следовательно, целая яхта стоит 2000 рублей.

2. *Варя и Галя решили сыграть в игру. Если на доске написано число n, то за один ход вместо него можно написать число $2n$ или $n-1000$. Проигрывает та участница, которая в результате своего хода получит либо число не более 2000, либо число не менее 6000. Может ли Варя или Галя добиться победы при любой игре соперницы, если в начале на доске было число 2021? Девочки ходят по-очереди, начинает Варя.*

Ответ: не может ни, та ни другая.

Решение. Заметим, что если число меньше 3000, но больше 2000, то умножением на 2 можно получить число, которое меньше 6000. Если число меньше 6000, но больше 3000, то вычитанием 1000 (возможно, два раза) можно получить число между 2000 и 3000. Таким образом, единственное число, из которого нельзя сделать ход – 3000. Докажем, что 3000 никто получить не мог. Заметим, что исходное число не делится на 5. Если мы умножаем его на 2 или вычитаем из него 1000, то новое число снова не делится на 5. Таким образом, Варя и Галя могли бы продолжать свою игру вечно и никто бы не проиграл.

3. *Биссектриса BK треугольника ABC такова, что $BC+CK=AB$. Докажите, что величины каких-то двух углов треугольника ABC отличаются в два раза.*

Решение. Продолжим сторону BC за точку C на отрезок CF, $CF=CK$. Тогда $BF=BC+CF=BC+CK=BA$, так что треугольник ABF равнобедренный. Продолжим BK до пересечения с отрезком AF в точке H. В треугольнике ABF отрезок BH является биссектрисой, а значит медианой и высотой. Тогда отрезок KH является медианой и высотой в треугольнике AKF, поэтому треугольник AKF равнобедренный. Поскольку $\angle BAF=\angle BFA$ и $\angle KAF=\angle KFA$, то $\angle BAC=\angle BAK=\angle BAF-\angle KAF=\angle BFA-\angle KFA=\angle BFK=\alpha$. Поскольку треугольник KCF равнобедренный, имеем $\angle CKF=\angle CFK=\alpha$. Но тогда внешний угол при вершине C этого треугольника $\angle KCB=\angle ACB=2\alpha$. Итак, угол при вершине C в треугольнике ABC в два раза больше угла при вершине B.

4. *Шахматная ладья держит под боем все клетки горизонтали, в которой она стоит, и все клетки вертикали, в которой она стоит. На шахматную доску поставили N ладей, каждая из которых бьет не более чем одну другую. Каково максимально возможное значение N?*

Ответ: 10.

Решение. Ясно, что в каждом столбце и строке не более двух ладей. Пусть N ладей расположены с соблюдением условия. На каждом поле, где стоит ладья, напишем число 0. В каждом из 8 столбцов проделаем следующую операцию: если в столбце стоят два числа, то прибавим к обоим по 1, если одно число, то к нему прибавим 2 (в пустом столбце ничего писать не будем). Затем проделаем точно такую же операцию с каждой строкой. Ясно, что на месте каждой из N ладей в результате будет написано либо 3, либо 4 (если написано 2, то эта ладья под боем двух других), поэтому сумма S всех написанных чисел не меньше $3N$. С другой стороны, поскольку в каждый из 8 столбцов и затем в каждую из 8 строк мы добавили не более чем 2, то $S \leqslant 32$. Итак, $3N \geqslant S \geqslant 32$, откуда $N \leqslant 10$. Пример легко строится.

5. *Пусть рыцарь круглого стола всегда говорит правду, а лжец круглого стола всегда лжет. За круглым столом сидят 105 человек, каждый из них рыцарь или лжец, причем известно, что лжецов больше. Каждый из сидящих за столом сказал: «Среди 10 человек слева от меня и 10 человек справа от меня за столом всего ровно 10 лжецов!». Сколько рыцарей может быть за столом?*

Ответ: 0 рыцарей.

Решение. Разобьем всех сидящих за столом на пять групп по 21 человеку. Тогда хотя бы в одну группу попадет хотя бы 11 лжецов. Иначе в каждой группе их максимум 10, т.е. всего не более $5 \times 10 = 50$, что меньше половины от общего числа. Рассмотрим эту группу. Если в ее центре сидит рыцарь, то он говорит правду, и в этой группе ровно 10 лжецов. Но мы уже установили, что их там хотя бы 11. Противоречие. Значит, в центре сидит лжец, а всего их в группе хотя бы 12 (всего ровно 11 быть не может, т.к. иначе центральный говорил бы правду). Рассмотрим теперь левого соседа центрального лжеца. Среди его 20 соседей есть хотя бы 11 лжец, т.к. одного крайнего соседа (может быть, лжеца) мы потеряли, сдвинувшись влево, но приобрели соседа-лжеца, который ранее был центральным. Повторяя рассуждения для него, получаем, что он тоже лжец. Сдвинемся опять влево и продолжим этот процесс. В конце концов мы получим, что все, сидящие за столов, являются лжецами.

9 класс

1. *Сумма цифр числа a равна 2012, а сумма цифр числа b равна 2021. Какова наименьшая возможная сумма цифр числа $a+b$?*

Ответ: 1.

Решение. Рассмотрим числа $a = 99\ldots900\ldots05$ (223 девятки и 224 нуля) и $b = 99\ldots95$ (224 девятки). Их сумма $a+b = 100\ldots0$ (448 нулей) и имеет сумму цифр 1.

2. *Однажды 18 мальчиков и 30 девочек расположились за круглым столом. При этом количество пар рядом сидящих мальчиков оказалось в два раза меньше, чем количество пар рядом сидящих девочек. Сколько за столом было пар, где рядом сидят мальчик и девочка?*

Ответ: 12.

Решение. Назовем *серией* одного или несколько подряд сидящих детей одного пола. Тогда количество серий мальчиков и серий девочек за круглым столом одинаково и пусть оно равно x. Поскольку пары, состоящие из соседствующих М и Д, находятся на границе серий, то этих пар будет $2x$. Кроме того, пар соседних девочек будет на x меньше, чем количество девочек, то есть $30-x$ (если для каждой девочки считать пару, состоящую из нее самой и ее соседки по часовой стрелке, то в каждой серии количество пар девочек будет на 1 меньше числа девочек в этой серии). Аналогично, пар соседей мальчиков всего $18-x$. По условию, $2(18-x) = 30-x$, откуда $x = 6$ и пар мальчик-девочка $2x = 12$.

3. *Если к двузначному числу X приписать справа двузначное число Y, то получится четырехзначное число Z. Известно, что число $n = \dfrac{Z}{X+Y}$ – целое. Найдите все возможные значения n.*

Ответ: Все натуральные числа от 11 до 90.

Решение. По условию, $Z = 100X + Y = n(X+Y)$. Отсюда $X(100-n) = Y(n-1)$ и $\dfrac{Y}{X} = \dfrac{100-n}{n-1}$. Поскольку $X \geqslant 10$ и $Y \leqslant 99$, имеем $\dfrac{Y}{X} = \dfrac{100-n}{n-1} \leqslant \dfrac{99}{10}$ и $109n \geqslant 1099$. Поэтому $n \geqslant 10\frac{9}{109}$ и поскольку n натуральное, то $n \geqslant 11$. Аналогично, поскольку $X \geqslant 99$ и $Y \leqslant 10$, то $\dfrac{Y}{X} = \dfrac{100-n}{n-1} \geqslant \dfrac{10}{99}$, откуда $109n \leqslant 9910$ и значит $n \leqslant \dfrac{9910}{109} = 90\frac{100}{109}$, $n \leqslant 90$. При этом данное значение $n = n_0$ мы получим, положив $X = n_0 - 1$ и $Y = 100 - n_0$.

4. *Точки K и L взяты на сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ так, что отрезки BL и DK делят площадь четырёхугольника пополам. Доказать, что отрезок KL проходит через середину диагонали AC.*

Решение. Проведём через вершину C параллельно диагонали BD прямую, пересекающую продолжения сторон AB и AD в точках P и Q соответственно. Площади треугольников BPD, BCD и BQD, имеющих общее основание BD и одинаковые высоты, равны, поэтому площади треугольников APD и AQB равны площади четырехугольника $ABCD$, а отрезки DK и BL делят их площади соответственно пополам. Следовательно, отрезки DK и BL являются медианами треугольников APD и AQB, а точки K и L серединами отрезков AP и AQ. Значит, отрезок KL – средняя линия в треугольнике APQ, параллельная стороне PQ и, по теореме Фалеса, делит отрезок AC пополам, что и требовалось доказать.

5. *Турнир по футболу среди 10 команд прошел в один круг: каждая из команд сыграла с каждой один раз. За победу команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение –*

0 очков. Когда турнир окончился, любители статистики заметили, что для любых трех команд найдутся такие две команды из этих трех, которые набрали одинаковое количество очков в играх внутри этой тройки. Докажите, что все 10 команд можно разбить на такие группы, что вничью сыграли любые две команды из одной группы, а количество групп при этом не более трех.

Решение. п1. Сначала выясним, как могли сыграть три команды между собой с соблюдением условий задачи. Если внутри тройки не было ничьих, единственным подходящим вариантом будет (Т1), когда каждая проиграла и выиграла по одному матчу, у всех по 3 очка. Если ничья была ровно одна, то сделавшие ее команды либо обе выиграли у третьей (Т2: 4,4 и 0 очков), либо обе проиграли третьей (Т3: 1,1 и 6 очков). Случай ровно с двумя ничьими невозможен. Подходит и вариант с тремя ничьими (Т4): все набирают по 2 очка.

п2. Из пункта 1 следует, что: а) Если две А и Б команды сыграли между собой вничью, то результаты матчей любой другой команды с А и с Б одинаковы. б) Если команда сыграла с командами А и Б с одинаковым результатом, то А и Б сыграли между собой вничью.

п3. Докажем, что в турнире была хотя бы одна ничья. В противном случае, всего имеем 45 побед во всех матчах, значит, найдется команда А, выигравшая не меньше 5 матчей. Рассмотрим команды Б и В, проигравшие А, очевидно, что тройка А,Б,В не удовлетворяет условию задачи. 4. Обозначим какие-нибудь команды, сыгравшие между собой вничью, за А и Б. В первую подгруппу включим все команды, сыгравшие с А и Б вничью, во вторую все команды, выигравшие у А и Б, в третью - все команды, проигравшие А и Б. Из пункта 2.б) следует, что в пределах каждой подгруппы все команды сыграли между собой вничью.

10 класс

1. *Натуральное число n и простые числа p, q таковы, что*

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}.$$

Найдите все возможные значения n.

Ответ: 1.

Решение. Приведя дроби к общему знаменателю, получим $pq = n(p+q+1)$. Поскольку p и q простые, то число $p+q+1$ равно одному из $1, p, q, pq$ (это все положительные делители числа pq). Поскольку $1 < 1+p+q$, $p < p+q+1$ и $q < p+q+1$, то $pq = p+q+1$ и $n = 1$. При этом $(p-1)(q-1) = 2$, что выполняется при $p = 2, q = 3$ или $p = 3, q = 2$. Эти числа простые.

2. *Кузнечик прыгает по координатной плоскости. Он стартует в начале координат и делает первый прыжок длиной 1 см в направлении оси Ox. Каждый следующий прыжок: во-первых, перпендикулярен предыдущему в любом из двух возможных направлений; во-вторых, длиннее предыдущего на 1 см. Сможет ли кузнечик оказаться в начале координат: а) после 2021-го прыжка; б) после 2023-го прыжка?*

Решение. а) Ответ: не может.

Прыжков нечетной длины будет сделано 1011. Их суммарная длина (длины прыжка с учетом знака: «+», если прыжок в направлении оси Ox, «−», если в противоположном направлении) будет нечетной (сумма нечетного количества нечетных чисел), то есть не равна 0. Поэтому в результате 2021-го прыжка кузнечик не будет на оси Oy, а значит и в начале координат.

б) Ответ: может.

Разобьем прыжки нечетной длины, которые выполняются вдоль оси Ox, на четверки с длинами прыжков $8n-7, 8n-5, 8n-3, 8n-1$, где $n = 1, 2, \ldots, 253$. Если прыжки с длинами $8n-7$ и $8n-1$ сделать в направлении оси Ox, а прыжки с длинами $8n-5$ и $8n-3$ в противоположном направлении, то за эти четыре прыжка получим нулевое приращение координаты x кузнечика. Поскольку кузнечик начал прыгать в начале координат, то в результате выполнения прыжков нечетной длины он окажется на оси Oy (так как он выполнил 253 полных четверки прыжков). Рассмотрим прыжки четной длины. Пусть кузнечик прыгнет на 2 и 4 в направлении оси Oy, а на 6 в противоположном направлении. Тогда в результате 6-го прыжка он окажется на оси Ox. Если после этого он будет прыгать на $8n$ и $8n+6$ в направлении оси Oy, а на $8n+2$ и $8n+4$ в противоположном направлении ($n = 1, 2, \ldots, 252$), то за такие четыре прыжка он будет возвращаться на ось Ox, и всего сделает 252 таких полных четверок прыжков. То есть, в результате выполнения прыжков четной длины кузнечик окажется на оси Ox. Итак. в результате всех своих прыжков кузнечик одновременно на оси Ox и на оси Oy, то есть в начале координат.

3. При каком наименьшем действительном положительном c неравенство

$$\frac{(a+c)^2}{b} + \frac{(b+c)^2}{a} \geqslant 8$$

выполняется для всех действительных положительных a, b?

Ответ: 1.

Решение. Поскольку $(a+c)^2 \geqslant 4ac$ и $(b+c)^2 \geqslant 4bc$, то

$$\frac{(a+c)^2}{b} + \frac{(b+c)^2}{a} \geqslant 4c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 4c\,\frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant 8c.$$

При этом если $a = b = c > 0$, то $\dfrac{(a+c)^2}{b} + \dfrac{(b+c)^2}{a} = 8c$. Поэтому, чтобы неравенство выполнялось для всех возможных $a, b > 0$, должно быть $8c \geqslant 8$. Отсюда $c \geqslant 1$.

4. *Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках X и Y. Точка A лежит на ω_1, лежит внутри ω_2 и отличается от точек X и Y. Лучи XA и YA вторично пересекают ω_2 в точках B и C соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности ω_1 и точку A, перпендикулярна прямой BC.*

Решение. Пусть E – точка окружности ω_1, диаметрально противоположная A. Нам нужно доказать, что прямые AE и BC перпендикулярны. Точка E может лежать как вне второй окружности, так и внутри нее, либо может совпадать с X или Y.

1. A лежит внутри ω_2, E не совпадает с X или Y. Обозначим точку пересечения BC и прямой AE за Z. Тогда $\angle CBX = \angle CMX$, как вписанные в ω_2, опирающиеся на общую хорду XC, и $\angle CYX = \angle AYX = \angle AEX$, как вписанные в ω_1, опирающиеся на общую хорду XA. Следовательно, четырехугольник $BZXE$ вписанный, поэтому $\angle BZE = \angle BXE = \angle AXE = 90°$.

2. A лежит внутри ω_2, и E совпадает, скажем, с X. Тогда четырехугольник $CBYX$ вписанный, поэтому $\angle CBX = \angle CYP = \angle AYP = \angle AYE = 90°$ и прямые AE и BC перпендикулярны.

5. *Дан выпуклый n-угольник. Если множество вершин незамкнутой, несамопересекающейся ломаной из $n-1$ звеньев совпадает с множеством всех вершин этого n-угольника, то назовем такую ломаную зигзагом. Сколько различных зигзагов существует в n-угольнике? (Зигзаги равны, если они совпадают как множества точек; например, в треугольнике ровно 3 зигзага).*

Ответ: $n \cdot 2^{n-3}$.

Решение. Назовем зигзаг *росчерком.* Докажем по индукции, что число росчерков, одним из концов которых является фиксированная вершина A, равно 2^{n-2} . База при $n = 3$ очевидна. Для произвольного n, имеем две возможности для звена с концом A – это стороны AB и AC n-угольника, где B и C – соседние с A вершины. Если первое звено AX отлично от AB и AC, то диагональ AX делит n-угольник на два невырожденных многоугольника с более, чем тремя вершинами в каждом, считая A и X. Тогда второе звено росчерка и все следующие, ввиду его несамопересекаемости, будут лежать в одном из них и не смогут содержать вершину другого, отличную от A и X, что противоречит условию. Пусть первым звеном является AB, тогда оставшиеся $n-2$ звена росчерка являются росчерком с началом B в $(n-1)$-угольнике, получающемся из исходного n удалением треугольника ABC. По индукционному предположению, таких росчерков будет 2^{n-3} – это в точности все росчерки с крайним звеном AB. Аналогично, росчерков с крайним звеном AC тоже будет 2^{n-3}, поэтому общее число росчерков, одним из концов которых является A, будет 2^{n-2}.

Теперь умножим 2^{n-2} на число вершин n и поделим пополам, так как каждый росчерк мы подсчитали дважды – с каждого из его концов. Всего получается $n \cdot 2^{n-3}$ росчерка.

11 класс

1. *Действительные числа x, y, z, t таковы, что $x^2+y^2=1$, $z^2+t^2=1$ и $xz+yt=0$. Найдите все возможные значения выражения $xy+zt$.*

Ответ: 0.

Решение. Пусть $y \neq 0$. Тогда из $xz+yt=0$ получаем $t=-\dfrac{xz}{y}$. Подставим это значение в $z^2+t^2=1$, и получим $z^2+\dfrac{x^2z^2}{y^2}=\dfrac{z^2(y^2+x^2)}{y^2}=\dfrac{z^2}{y^2}=1$, откуда $z=\pm y$. Если $z=y\neq 0$, то из $xz+yt=0$ получаем $x+t=0$, $t=-x$ и $xy+zt=xy+y(-x)=0$. Если $z=-y\neq 0$, то аналогично $-x+t=0$ и $xy+zt=xy+(-y)x=0$. Если же $y=0$, то из $x^2+y^2=1$ получим $x=\pm 1$, из $xz+yt=0$ получим $z=0$ и тогда $xy+zt=x\cdot 0+0\cdot t=0$.

2. *Натуральное число n равно одновременно и сумме нескольких (не менее двух) натуральных чисел, и произведению тех же натуральных чисел. Найдите все возможные значения n.*

Ответ: все числа, кроме простых и 1.

Решение. Если $n=1$, то оно не может быть суммой не менее двух натуральных чисел (наименьшая сумма не менее чем двух натуральных чисел равна 2). Если $n=p$ – простое, то оно может быть лишь произведением p и нескольких единиц (не менее одной). Но тогда сумма этих чисел будет не меньше $p+1>n$. Пусть $n=a\cdot b$, где $a, b\geqslant 2$. Тогда возьмем a, b и $ab-a-b$ единиц (поскольку $1\leqslant (a-1)(b-1)=ab-a-b+1$ имеем $ab-a-b\geqslant 0$). Сумма этих чисел равна $a+b+ab-a-b=ab$, как и произведение.

3. *Дана клетчатая доска 10×10, все клетки которой изначально белые. Аня и Боря по очереди красят по одной клетке доски, начинает Аня. Аня красит в зеленый цвет любую не окрашенную еще клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток пока не покрашена в зеленый. Боря же красит в красный цвет любую пока не окрашенную клетку. Какое наибольшее количество клеток Аня может сделать зелеными при любой игре Бори?*

Решение. Аня всегда может покрасить в зеленый цвет не меньше 25 клеток доски, если будет красить на каждом очередном ходу любую, ещё не окрашенную к этому моменту клетку, являющуюся чёрной при шахматной раскраске доски. Таких клеток 50, из них она успеет окрасить не меньше 25, покрашенные ранее зеленые клетки ей при этом мешать не могут, так как чёрные при шахматной окраске клетки не могут быть соседними по стороне. С другой стороны, Боря может не позволить ей окрасить больше. Для этого он разбивает всю доску на 25 квадратов 2 на 2 клетки и на каждый ход Ани в некоторую клетку F некоторого пустого квадрата своим ходом красит вторую клетку того же квадрата, образующую с F его диагональ. При такой стратегии Аня не сможет окрасить больше одной клетки каждого квадрата 2 на 2, и всего окрасит не больше 25 клеток.

4. *Предположим, что знакомства между людьми взаимны: если A знает B, то и B знает A. Докажите, что если в комнате собрались 13 человек, то среди них: либо есть человек, знающий четверых других; либо некоторые четверо попарно незнакомы.*

Решение. Допустим, что каждый в компании знает не более 3 других. Рассмотрим любого человека из компании, назовем его A, у него не более 3 знакомых, значит, после удаления из компании A и его знакомых останется не менее 9 человек. Возьмем любого из них, скажем, B. После удаления из компании B и его знакомых останется не менее 5 человек. Возьмем любого из них, скажем, B. После удаления из компании B и его знакомых останется хотя бы один человек. Выберем одного из последних оставшихся и назовем его D. По выбору A, B, C, D – искомая четверка попарно незнакомых членов компании.

5. *На окружности ω зафиксированы точки A и B. Выберем на окружности ω какую-нибудь точку C, не совпадающую ни с A, ни с B. Из середины M хорды BC проведем перпендикуляр MH к хорде AC. Докажите, что прямые HM, полученные при всевозможных выборах C, все проходят через некоторую точку X.*

Решение. Сначала считаем, что C выбрана на большей дуге AB окружности и величина угла ACB не больше 90 градусов. Опустим из B на прямую AC перпендикуляр с основанием E. Треугольник BEC прямоугольный, с постоянным углом при вершине C, следовательно, такие треугольники при всех C подобны между собой. Отсюда вытекает, что угол AHB между стороной AC и медианой BH во всех таких треугольниках один и тот же и зависит только от длины хорды AB. Несложно подсчитать, что тангенс этого угла вдвое больше тангенса угла ACB. Значит, точка H при этом всегда лежит на окружности Ω, содержащей вершины всех углов данной величины, опирающихся на отрезок AB. Наконец, MH – перпендикуляр к хорде AH окружности Ω, следовательно, MH всегда проходит через конец X диаметра окружности Ω, проходящего через A. По доказанному. Ω не зависит от выбора C, значит, X тоже не зависит от выбора C.

Если же точка C выбрана на меньшей дуге окружности и угол ACB – тупой, то проделав все аналогично, мы снова получим прямоугольный треугольник BEC с тем же углом при вершине C, что и в первом случае, Но здесь угол AHB будет равен 180° минус угол BHE, являющийся в этом случае углом между BH и AC и равный аналогичному углу из первого случая. Следовательно, в этом случае снова H лежит на окружности Ω, с другой стороны от хорды AB и перпендикуляр MH к хорде AH снова проходит через конец X диаметра окружности Ω, проходящего через A.