Т.В. Бочкова

Поиск альтернативных решений стереометрических задач

Методическая разработка

Йошкар-Ола
ГБУ ДПО Республики Марий Эл
«Марийский институт образования»
2023

ББК 74.2
Б 86

*Рекомендовано научно-методическим советом
ГБУ ДПО Республики Марий Эл «Марийский институт образования»*

Автор
Бочкова Татьяна Владиславовна, учитель математики
ГБОУ РМЭ «Политехнический лицей-интернат»

Б 86 **Бочкова Т.В.** Поиск альтернативных решений стереометрических задач: Методическая разработка. – Йошкар-Ола: ГБУ ДПО Республики Марий Эл «Марийский институт образования», 2023. – 12 с.

Методическая разработка предназначена для учителей математики 10-11 классов. Представляет собой практический материал для проведения урока итогового повторения по теме «Решение задач по стереометрии»

В авторской редакции.

ББК 74.2

Содержание

Введение

Многие математические задачи могут быть решены несколькими способами. При этом поиск альтернативных решений сам по себе может стать отдельной математической задачей. Поиск различных способов решения задачи развивает у обучающихся умение анализировать, логически мыслить, прогнозировать дальнейший процесс решения. Способность быстро переключаться с одного рассуждения на другое повышает «гибкость» ума, позволяет рассматривать математическую модель с разных сторон. Всё это, несомненно, повышает математическую грамотность обучающихся.

Сложность решения стереометрических задач, в первую очередь, заключается в том, что рисунок является лишь плоским изображением реальных геометрических тел. Поэтому геометрическое место фигур и их взаимное расположение приходится обосновывать и математически доказывать. Умение ориентироваться в многообразии различных свойств, признаков, формул и других математических суждений станет залогом выбора наиболее рационального решения. Чем больше в арсенале обучающихся различных методов и приёмов решения математических задач, тем успешнее и интереснее будет процесс решения. Умение находить разные пути решения задачи позволит обучающимся и в дальнейшем всесторонне анализировать сложившуюся ситуацию, делать правильный выбор, принимать наиболее эффективные решения.

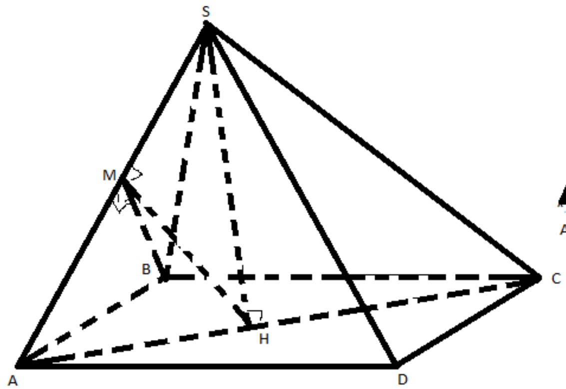
Цель данной методической разработки – показать на примере одной стереометрической задачи три возможных способа её решения. Предложенный материал может быть использован на одном из уроков итогового повторения в 11 классе, когда весь теоретический материал уже изучен. Это может быть урок одной задачи или урок посвященный поиску альтернативных решений. Способы решения могут быть предложены учителем или найдены учениками самостоятельно. В последнем случае будет не сложно выделить самых подготовленных и творчески мыслящих обучающихся.

Основная часть
Поиск альтернативных способов решения стереометрических задач

В качестве примера рассмотрим задачу из учебника «Математика 10» под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина.

SABCD – правильная четырёхугольная пирамида, у которой высота SH равна 6, ребро основания равно 4. Найдите величину двугранного угла BSAC.

I способ. Рассмотрим стандартную задачу на поиск двугранного угла через величину его линейного угла. Для этого необходимо построить линейный угол и доказать, что он действительно таковым является. Это, пожалуй, и является наиболее сложным в данном способе решения.



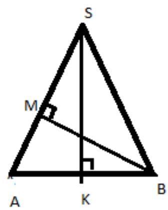


Рисунок 1

Так как пирамида правильная, то точка H является точкой пересечения диагоналей квадрата ABCD. Диагональ AC = $4\sqrt{2}$, тогда AH = $2\sqrt{2}$.

1. Рассмотрим треугольник ASH и найдём высоту HM.

Площадь этого треугольника $S_{ASH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Гипотенуза

AS = $\sqrt{36+8} = 2\sqrt{11}$. Тогда высота HM = $\dfrac{2S_{ASH}}{AS} = \dfrac{2\cdot 6\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. Из треугольника AMH найдем AM = $\sqrt{8-\dfrac{72}{11}} = \dfrac{4}{\sqrt{11}}$.

2. Рассмотрим треугольник ASB и найдем в нём высоту, проведённую к стороне AS. Докажем, что это отрезок BM.

$S_{ASB} = \dfrac{1}{2}AB\cdot SK$. По теореме Пифагора SK = $\sqrt{44-4} = 2\sqrt{10}$.

Тогда площадь треугольника $S_{ASB} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$. Пусть высота к стороне AS обозначена BM_1. Тогда BM_1 = $\dfrac{2S_{ASB}}{AS} = \dfrac{2\cdot 4\sqrt{10}}{2\sqrt{11}} = \dfrac{4\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$. Из треугольника AM_1B найдем AM_1.

$AM_1 = \sqrt{16-\dfrac{160}{11}} = \dfrac{4}{\sqrt{11}}$. Так как $AM=AM_1$, то точки M и M_1 совпадают, значит отрезки BM и HM являются сторонами линейного угла двугранного угла BSAC.

3. Чтобы найти величину линейного угла BMH, рассмотрим треугольник BMH и найдём косинус искомого угла по следствию из теоремы косинусов.

$$\cos BMH = \frac{BM^2 + MH^2 - BH^2}{2\cdot BM\cdot MH} = \frac{\dfrac{160}{11}+\dfrac{72}{11}-8}{2\cdot\dfrac{4\sqrt{10}}{\sqrt{11}}\cdot\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Итак, величина двугранного угла BSAC равна $\arccos\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

II способ. Рассмотрим двугранный угол BSAC как угол между плоскостями ASB и ASC. Для решения задачи воспользуемся методом координат. Для этого введём прямоугольную систему координат с началом отсчёта в точке H. Направим ось Ox по диагонали CA, ось Oy по диагонали BD, ось Oz по высоте SH.

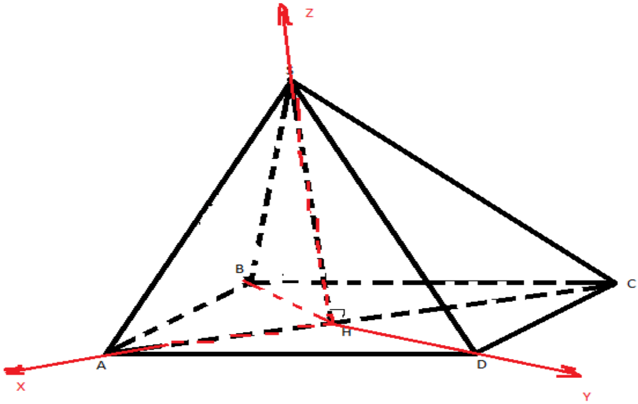


Рисунок 2

В квадрате ABCD диагональ AC= $4\sqrt{2}$, тогда AH=BH=CH= $2\sqrt{2}$. Тогда вершины пирамиды имеют следующие координаты: $A(2\sqrt{2};0;0), B(0;-2\sqrt{2};0), C(-2\sqrt{2};0;0), S(0;0;6)$.

Составим уравнения плоскостей ASB и ASC. Угол между этими плоскостями будет равен углу между их векторами нормали. Общее уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$, где числа a,b,c – координаты вектора нормали. Для уравнения плоскости ASB подставим координаты точек A,Sи B в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}a+d=0, \\ 6c+d=0, \\ -2\sqrt{2}b+d=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{d}{2\sqrt{2}}, \\ c=-\dfrac{d}{6}, \\ b=\dfrac{d}{2\sqrt{2}}. \end{cases} \Rightarrow \overline{n}\left\{-\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{6}\right\}$$

Заметим, что плоскость ASC – это координатная плоскость xOy, поэтому её уравнение имеет вид y=0. Вектором нормали к этой плоскости будет вектор $\overline{m}\{0;1;0\}$.

Найдём косинус угла между векторами нормали.

$$\cos(\overline{n};\overline{m})=\frac{\overline{n}\cdot\overline{m}}{|\overline{n}|\cdot|\overline{m}|}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1\cdot\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{36}}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Итак, угол между плоскостями ASB и ASC, а значит и двугранный угол BASC имеет величину $\arccos\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

III способ. Рассмотрим двугранный угол BSAC как часть трёхгранного угла ABSC. Тогда величину этого угла можно найти по теореме косинусов для трёхгранного угла.

Для удобства введём следующие обозначения:

$\prec SAC = \alpha, \prec SAB = \beta, \prec BAC = \gamma, \prec BSAC = \varphi$.

Тогда теорема косинусов для трёхгранного угла ABSC будет выглядеть так:

$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi$.

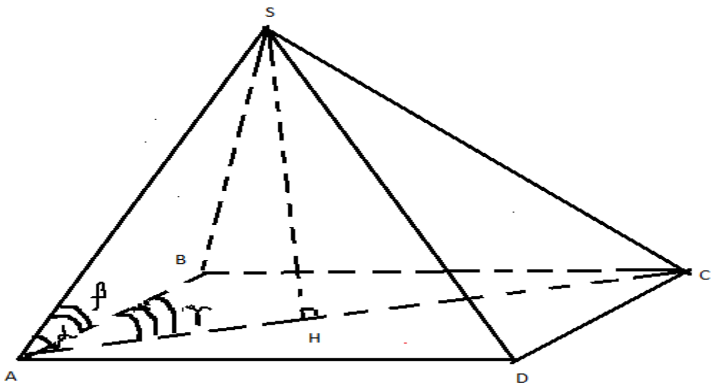


Рисунок 3

Так как по условию задачи пирамида правильная, то ABCD – квадрат, значит <BAC=45^0, то есть $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Воспользуемся некоторыми результатами, полученными в I способе и планиметрической сноской на рисунке 1. В треугольнике ASH :

$AH = 2\sqrt{2}; AS = 2\sqrt{11}$, тогда

$$\cos\alpha = \frac{AH}{AS} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \sin\alpha = \frac{SH}{AS} = \frac{6}{2\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

В треугольнике ASK: $SK = 2\sqrt{10}; AK = 2; AS = 2\sqrt{11}$, тогда

$$\cos\beta = \frac{AK}{AS} = \frac{2}{2\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}, \sin\beta = \frac{SK}{AS} = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}.$$

Подставим найденные значения в формулу:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}} \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{11}} \cos\varphi = \frac{9\sqrt{2}}{22}$$

$$\cos\varphi = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Итак, двугранный угол BSAC равен $\underline{\arccos\frac{3\sqrt{5}}{10}}$.

Заключение

В математике нет универсальных способов решения, идеально подходящих для всех типов задач. В каждом способе есть свои преимущества и свои трудности.

Так в первом, традиционном, способе решения могут возникнуть трудности в построении и последующем доказательстве, что построенный угол или перпендикуляр, изображающий расстояние, и есть искомый. В то же время, всё решение строится на известных свойствах и формулах из планиметрии.

Во втором способе использован метод координат. Его преимуществом является то, что для решения нет необходимости строить линейный угол или сечение многогранника плоскостью. Достаточно воспользоваться готовой формулой для нахождения косинуса угла или расстояния от точки до плоскости. Однако, вычисление координат точек может быть затруднено неудачным выбором прямоугольной системы координат. Да, и решение системы уравнений для записи уравнения плоскости может оказаться громоздким и трудоёмким.

Решение задачи третьим способом оказалось наиболее лёгким и коротким. Но, сама теорема косинусов для трёхгранного угла рассматривается не во всех учебниках. Хорошо, если обучающиеся познакомятся с ней на элективных или других дополнительных занятиях.

Для того чтобы выбрать наиболее рациональный способ решения задачи, школьникам необходимо уметь анализировать условие задачи, иметь представление обо всех возможных способах решения, просчитывать возможные трудности каждого способа и соотносить их с реальными возможностями. Выработка таких навыков будет способствовать повышению математической грамотности обучающихся и сделает процесс изучения математики интересным и увлекательным.

Библиографический список

1. Козлов В.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 10 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни /В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. – 3-е изд. - М.: ООО «Русское слово - учебник», 2017. – 464с. – (Инновационная школа).
2. Козлов В.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 11 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни /В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. – 3-е изд. - М.: ООО «Русское слово - учебник», 2017. – 464с. – (Инновационная школа).

Бочкова Татьяна Владиславовна

Поиск альтернативных решений стереометрических задач

Методическая разработка

Усл. печ. л. 0,75. Учетно-изд. л. 0,68.